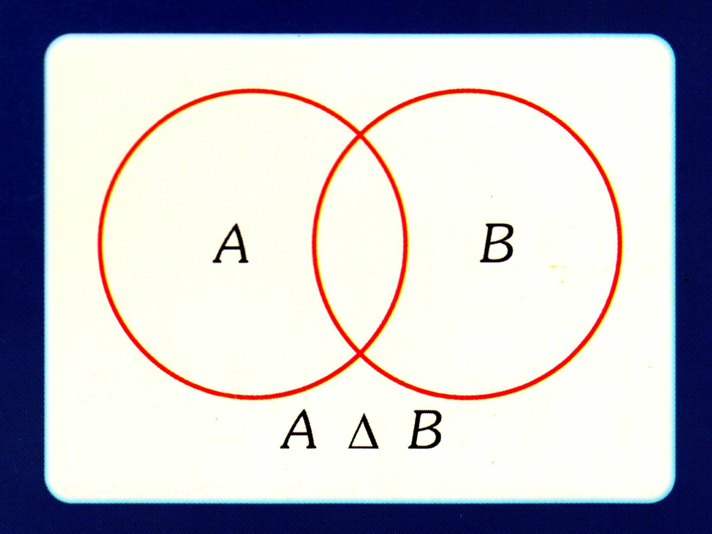
LOGICA Y TEORIA DE CONJUNTOS



- Proposiciones Lógicas
- Circuitos Lógicos
- Conjuntos y sus Aplicaciones

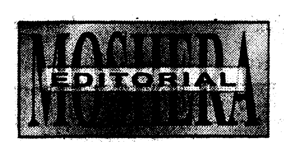
Moisés Lázaro C.

LÓGICA
Y
TEORÍA
DE CONJUNTOS

NOCIONES DE LÓGICA

CONJUNTOS Y SUS APLICACIONES

MOISÉS LÁZARO CARRIÓN



Autor : *Moisés Lázaro Carrión*
Estudios : *Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).*

Experiencia Docente:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS
Autor: Moisés Lázaro Carrión

Reimpresión: Enero 2012
Tiraje: 500 ejemplares

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax : 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

CONTENIDO

1

NOCIONES DE LÓGICA

2

CONJUNTOS

CAPITULO 1

NOCIONES DE LÓGICA

INTRODUCCIÓN

Todos los tópicos relativos a las matemáticas se razonan desde el punto de vista lógico y por lo tanto hay que tener muy en cuenta el enunciado de las proposiciones MATEMATICAS y su consecuente validez.

NOTA: **VALIDEZ** significa que una proposición es verdadera o es falso, pero nunca debe ocurrir que sea verdadero y falso a la vez.
A lo largo de todos los temas que iremos desarrollando en estos apuntes, veremos cómo se usan los conectivos lógicos y cuando es VERDADERO o FALSO una disyunción, una conjunción o una condicional.

1.1 ENUNCIADO

Se llama enunciado a toda frase u oración. Algunos enunciados son mandatos o interrogaciones o son expresiones de emoción; otros en cambio son afirmaciones o negaciones que tienen las características de ser verdadero o falsa.

EJEMPLO

01. ¿Qué curso te has matriculado?
02. ¡Vaya rápido!
03. ¡Viva el Perú!
04. Prohibido hacer bulla
05. Dos más tres es igual a cinco
06. Todas las gallinas son aves
07. París es la capital de Francia
08. $5 > 8$
09. $3+5=8$
10. $x^2 < 4y$
11. $x^2 + y^2 \leq 9$

OBSERVACIÓN: Los enunciados que expresan una exclamación, una interrogante, una emoción; son expresiones no proposicionales, tales como los ejemplos 1,2,3,4.

1.2 PROPOSICIÓN:

Llamamos PROPOSICIÓN a todo enunciado que tiene la cualidad de ser VERDADERA (V) o de ser FALSA (F), pero nunca puede ser V y F a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Los ejemplos: 5,6,7,8,9 son proposiciones.

Los ejemplos: 10 *y* 11 son enunciados **abiertos**.

NOTACIÓN.- Denotaremos a las proposiciones con letras minúsculas: p, q, r, s, t. Si son muchas proposiciones, entonces usaremos subíndices, tales como:

$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, p_n$

$q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_n$

$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_n$, etc.

EJEMPLOS DE PROPOSICIONES:

p : "dos mas tres, es igual a cinco"
q : "ocho es menor que tres"
r : "cinco es diferente que cero"
s : "cuatro multiplicado por tres, es igual a doce"
t : "cuatro y diez son múltiplos de dos"
u : "2 es menor que 3 y 3 es múltiplo de 5"

Como podemos observar:

p es V	s es V
q es F	t es V
r es V	u es F

En las matemáticas las proposiciones fundamentales son:

a) los axiomas o postulados
b) los lemas
c) los teoremas
d) los corolarios.

a) Los axiomas o postulados, son proposiciones cuya **VALIDEZ** se aceptan sin demostración.

b) Los lemas, son proposiciones previas a la demostración de algunos teoremas.

c) Los teoremas, son proposiciones que para ser **VALIDAS**, necesitan de su demostración. Se demuestran usando los axiomas y algunas tautologías lógicas.

d) Los corolarios, son proposiciones que son consecuencias de algunos teoremas.

1.3 ENUNCIADOS ABIERTOS

Son expresiones que contienen **variables** y que no tiene la propiedad de ser verdadero o falso.

EJEMPLO 1 $P[x]$: "$x < 5$" es un enunciado abierto porque no podemos afirmar que es V o es F. Sólo cuando la variable "x" toma un valor numérico se hace V o F.

Así tendremos: $p[3]$: $3 < 5$ es V
$p[9]$: $9 < 5$ es F

EJEMPLO 2 $A[x,y] : x^2 + y^2 = 25$ también es un enunciado abierto.

VARIABLE.- Es una cantidad susceptible de variar en cierto campo o recorrido.
Las variables se representan por las letras minúsculas: x, y, z, t, u, v. Estas letras reciben el nombre de VARIABLES INDETERMINADAS.

EJEMPLO 1 $y = \sqrt{x-2}$ es un número real, si el número real $x-2$ es positivo o cero.

Es decir, el recorrido de x es $x \geq 2$

EJEMPLO 2 En la ecuación: $x^2 + y^2 = 25$.

- El recorrido de x es : $-5 \leq x \leq 5$
- El recorrido de y es : $-5 \leq y \leq 5$

Con mayor detalle se estudia en el capítulo relativo a relaciones de $I\!R$ en $I\!R$.

1.4 LAS PROPOSICIONES: SIMPLES Y COMPUESTAS

1.4.1 PROPOSICIÓN SIMPLE (atómica o elemental): Son los enunciados que tienen un solo sujeto y un solo predicado. No llevan ningún conectivo lógico.

EJEMPLOS

p_1 :	"9 es múltiplo de 3"	p_1 es	V
p_2 :	"3 es mayor que 2"	p_2 es	V
p_3 :	"$2 \times 5 = 12$	p_3 es	F
p_4 :	"2 es mayor que 0"	p_4 es	V
p_5 :	"3 es mayor que 8"	p_5 es	F

1.4.2 PROPOSICIÓN COMPUESTA (molecular o coligativa):

Son aquellas proposiciones que se obtienen de la combinación de dos o más proposiciones simples, las cuales son enlazadas por los símbolos: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, llamadas conectivas lógicas.

Donde: "*y*" se representa por "$\wedge$"
"*o*" se representa por "$\vee$"
"si … entonces … " se representa por "$p \rightarrow q$"
"si … y solo si … " por "$p \leftrightarrow q$"

EJEMPLOS

1) $\underbrace{\text{9 es mayor que 3}}_{p_1}$ y $\underbrace{\text{"3 es mayor que 2"}}_{p_2}$

Se denota por: $p_1 \wedge p_2$

2) A: "José llegó tarde, sin embargo dio examen"
José llego tarde $= P_3$
José dio examen $= P_4$
$A \equiv P_3 \wedge P_4$

NOTA: " $\equiv$ " se lee "equivalente"
sin embargo es = "*y*"

3) B: "Maradona jugó, aunque estuvo lesionado"

Maradona jugó $= P_5$

Maradona estuvo lesionado $= P_6$

$$B \equiv P_5 \wedge P_6$$

NOTA: aunque es "*y*".

4) C: "si 9 es múltiplo de 3 (P_7) y 12 es múltiplo de 3 (P_8), entonces 9 + 12 es múltiplo de 3 (P_9)"

$$C \equiv (p_7 \wedge p_8) \rightarrow p_9$$

5) D: "No es el caso que Pedro baile y no cante"

Pedro baila $= p$

Pedro cante $= q$

$D \equiv \sim (p \wedge \sim q)$

1.5 CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos son símbolos que enlazan proposiciones atómicas, sin formar parte de ellas. Dichos símbolos también toman el nombre de operadores.

Los conectivos lógicos que usaremos en matemáticas son:

La conjunción : $\wedge$

La disyunción : $\vee$

La condicional : $\rightarrow$

La bicondicional : $\leftrightarrow$

La negación : $\sim$

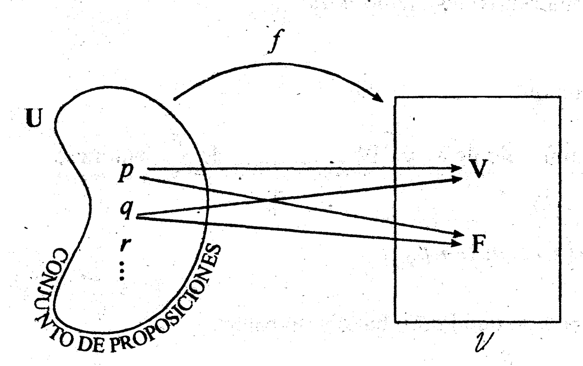
1.6 TABLAS DE VERDAD

La **VERDAD** o **FALSEDAD** de una proposición se denomina su **VALIDEZ** (o su valor de verdad). La validez de la conjunción, de la disyunción, de la condicional, de la bicondicional y de la negación pueden representarse en **TABLAS**.

En consecuencia, dadas dos o más proposiciones simples cuyos valores de **VERDAD** son conocidas, el **VALOR DE VERDAD** de una **PROPOSICIÓN COMPUESTA** depende de la verdad de cada uno de las proposiciones componentes y se determina mediante **TABLAS DE VERDAD**.

1.7 VALIDEZ DE UNA PROPOSICIÓN

Existe una correspondencia entre una proposición y su valor de verdad, así tenemos:



Si $U = \{ p, q, r, \ldots \}$ es el conjunto de proposiciones *y* $\mathcal{V} = \{V, F\}$ es el conjunto de valores de verdad, entonces la correspondencia establecida entre los elementos de U y de los elementos de $\mathcal{V}$ es:

$$f(p) = \begin{cases} V, \text{ si } p \text{ es verdadera} \\ F, \text{ si } p \text{ es falso} \end{cases}$$

"A cada proposición p le corresponde sólo un valor, que puede ser V (verdadero) ó F (falsa)".

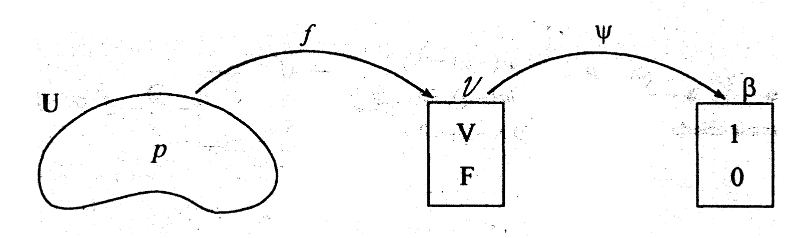
1.8 CIRCUITOS CONMUTADORES

Un circuito conmutador es un circuito eléctrico que tiene interruptores que permiten el paso de la corriente o la interrupción de la corriente.

En este caso, para diseñar los circuitos eléctricos, se usa la siguiente notación:

"El "1" indica "PASA CORRIENTE"
"El "0" indica "NO PASA CORRIENTE"

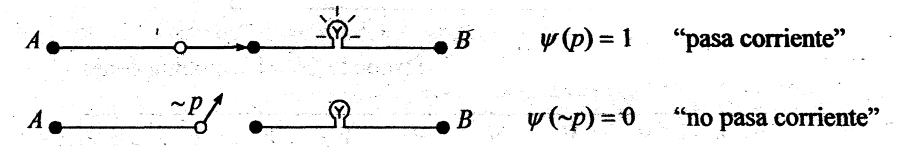
De manera que en circuitos eléctricos se usa como notación:
El "1" en lugar de "V "
El "0" en lugar de "F ".
Así quedaría establecida una correspondencia unívoca entre los conjuntos $\mathcal{V} = \{V, F\}$ y $\beta = \{1, 0\}$



$$\psi(p) = \begin{cases} 1 \quad , \text{ si } p \text{ es verdadero} \\ 0 \quad , \text{ si } p \text{ es falso} \end{cases}$$

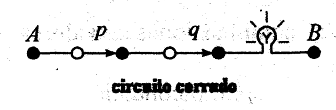
1.8.1 DISEÑOS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

a) Para una proposición p



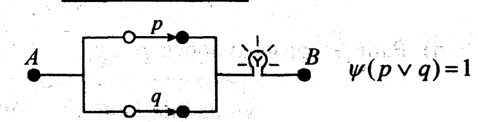
b) Para dos proposiciones p y q

CIRCUITO EN SERIE



$\psi(p)=1$
$\psi(q)=1$
$\psi(p \wedge q)=1$

CIRCUITO EN PARALELO



$\psi(p \vee q)=1$

CIRCUITO EN SERIE

A ~p q B

$\psi(\sim p)=0$
$\psi(q)=1$
$\psi(\sim p \wedge q)=0$

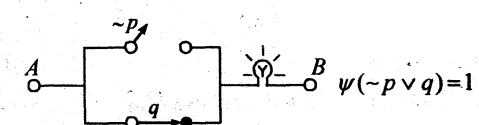
CIRCUITO EN PARALELO

A p ~q B

$\psi(p \vee \sim q)=1$

p ~q B

$\psi(p)=1$
$\psi(\sim q)=0$
$\psi(p \wedge \sim q)=0$



$\psi(\sim p \vee q)=1$

A ~p ~q B

circuito abierto

$\psi(\sim p)=0$

$\psi(\sim q)=0$

$\psi(\sim p \wedge \sim q)=0$

A ~p ~q B $\psi(\sim p \vee \sim q)=0$

1.8.2 COMBINACIÓN DE DOS O MÁS PROPOSICIONES

1) Para una proposición p le corresponde $2^1 = 2$ posibles valores: p < V, F

2) Para dos proposiciones p y q le corresponde $2^2 = 4$ combinaciones de valores.

p	V	V	F	F
q	V	F	V	F

3) Para tres proposiciones p, q y r le corresponde $2^3 = 8$ combinaciones

p	V	V	V	V	F	F	F	F
q	V	V	F	F	V	V	F	F
r	V	F	V	F	V	F	V	F

n) Para "n" proposiciones $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_n$ habrán 2^n combinaciones de valores.

Las tablas de verdad de la conjunción, disyunción, condicional, bicondicional y negación se explica a continuación.

1.9 LA CONJUNCIÓN. Dadas dos proposiciones p y q, la **conjunción** es el resultado de reunir estas proposiciones con el conectivo "$\wedge$".

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

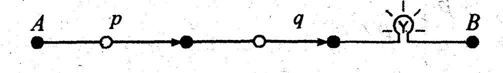
p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

NOTACIÓN.- La conjunción se denota de dos formas:

$p \wedge q$ se lee "p y q"

$p \cdot q$ se lee "p y q"

En circuitos eléctricos la conjunción "$p \wedge q$" viene a ser un circuito en **SERIE**.



que corresponde a "$p \wedge q$" cuando p es V y q es V.

Para efectos prácticos, el circuito en SERIE $p \wedge q$ se representan por:

$$A \bullet\!\!-\!\!-\!\!-p-\!\!-\!\!-q-\!\!-\!\!-\!\!\bullet B$$

si miramos el "CIRCUITO EN SERIE" nos daremos cuenta que la bomba eléctrica prende, sólo cuando "$p \wedge q$" están cerradas a la vez.

Estas ideas nos conlleva a enunciar el siguiente principio lógico o REGLA de la CONJUNCIÓN $p \wedge q$ que afirma:

> La conjunción "$p \wedge q$" es V sólo cuando "p es V y "q es V". Si uno de ellos es F, el resultado es F.

En general, una conjunción es V, cuando todos sus componentes son V.

$$\begin{array}{l} A \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ \ldots\ldots \wedge P_n \\ V \equiv \ V \quad\ V \quad\ V \qquad\quad\ \ V \end{array}$$

NOTA: En todo párrafo, las palabras: "pero", "sin embargo", "además", "no obstante", "aunque", "a la vez", etc. equivalen al conectivo "$\wedge$".

EJEMPLOS

(1) La bandera peruana es blanca y roja.

La bandera peruana es blanca $= p$
La bandera peruana es roja $= q$
} "$p \wedge q$" o "$p \cdot q$"

(2) Manuel es juez pero honesto

Manuel es juez $= p$
Manuel es honesto $= q$
} "$p \wedge q$"

(3) Las computadoras son caras, sin embargo son muy útiles.

Las computadoras son caras $= p$
Las computadoras son muy útiles $= q$
} "$p \wedge q$"

(4) 3 es menor que 5, pero mayor que 1

3 es menor que 5 $= p$
3 es mayor que 1 $= q$
} "$p \wedge q$"

1.10 LA DISYUNCIÓN.

La disyunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q por el conectivo "o".

Como el sentido del conectivo "o" es excluyente, se puede interpretar de dos maneras: débil o inclusiva y fuerte o exclusiva.

1.10.1 LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA O DÉBIL

La disyunción inclusiva o débil de p y q se denota por "$p \vee q$" y se lee "p o q".

TABLA DE VERDAD

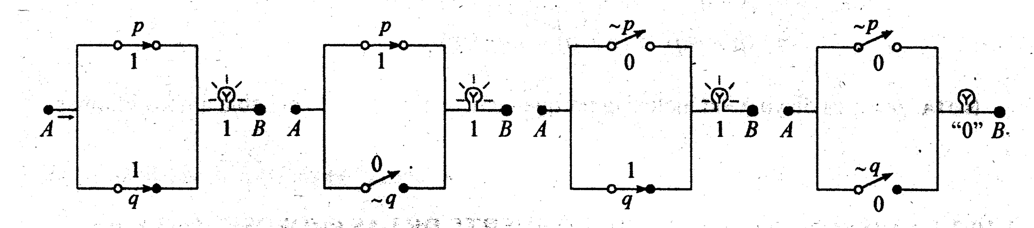
p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El principio lógico de la Disyunción lógica es:
La disyunción inclusiva "$p \vee q$" es V, cuando por lo menos una de las proposiciones componentes es V. Es falso sólo cuando los dos son falsas.

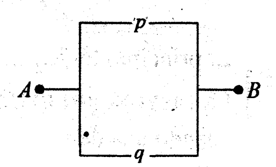
En general, $A \equiv p_1 \vee p_2 \vee \ldots\ldots\ldots \vee p_n$ es verdadera cuando por lo menos algún p_i es verdadera. A será FALSA cuando todas las p_i son FALSAS.

En circuitos lógicos, la DISYUNCIÓN "$p \vee q$" es un circuito en PARALELO.



En estos circuitos en paralelo, observamos que: bastará cerrar un interruptor para que prenda la bomba y permanecerá apagada sólo cuando ambos interruptores están abiertas.

Para efectos prácticos, el circuito en paralelo que corresponde a la disyunción "$p \vee q$" bastará representar por el siguiente diagrama:



EJEMPLOS En matemáticas es frecuente el uso de los enunciados abiertos. En estos casos, la(s) variable(s) deben ser elementos de un conjunto referencial. Veamos:

1) En $\mathbb{R}$, $y = \sqrt{3-x}$ es un número real cuando $x \geq 3$.

   En este caso p es verdadero para los $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \geq 3$.

2) En $\mathbb{R}$, $q(x)$: $(x-1)^2 \leq 0$ es verdadero sólo cuando $x = 1$.

   Dicho de otra manera: El conjunto solución es $\{1\}$.

   En $\mathbb{R}^2$, $r(x,y)$: $x^2 + y^2 = 4$ es un enunciado abierto.

   Cuando $-2 \leq x \leq 2 \;\wedge\; -2 \leq y \leq 2$, r es verdadero.

3) De dos idiomas: Inglés **y francés, Juan habla** por lo menos un idioma ≡

≡ **Juan habla inglés** o Juan habla francés

$p \quad \vee \quad q$

$\equiv p \vee q$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$

NOTA: $p \vee q$ **es disyunción** inclusiva porque incluye a $p \wedge q$: Juan habla ambos idiomas.

1.10.2 LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE DE LAS PROPOSICIONES p y q

Se denota por "$p \, \Delta \, q$" o por "$p \not\equiv q$" y se lee de dos maneras:

$p \, \Delta \, q$ → "o p, o q"
→ "p o q, pero no ambos"

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Delta q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

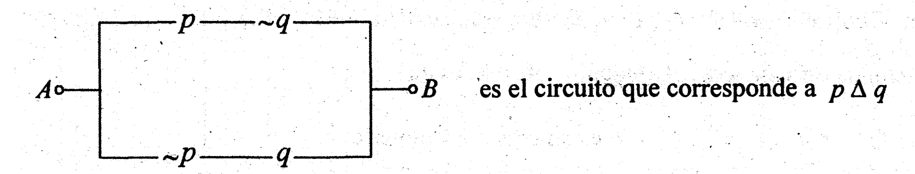
El principio lógico de la DISYUNCIÓN EXCLUSIVA es:
La DISYUNCIÓN EXCLUSIVA $p \, \Delta \, q$ es verdadera **sólo** cuando una de sus componentes es verdadera.

La DISYUNCIÓN EXCLUSIVA, tiene varias equivalencias lógicas, que nos permiten operar de la mejor forma:

$$p \Delta q \equiv \sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

"≡" se lee "equivalente"

La forma: $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ nos permite representar el siguiente circuito paralelo:



es el circuito que corresponde a $p \, \Delta \, q$

EJEMPLOS

1) De dos idiomas: inglés y francés

Juan habla sólo un idioma $\equiv$ Juan habla inglés pero no francés o Juan habla francés pero no inglés

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

$\equiv p \,\Delta\, q$

2) El profesor ordenó hacer la tarea A o B pero no ambos

$p \vee q \quad \wedge \quad \sim (p \wedge q)$

$\equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

$\equiv p \,\Delta\, q$

Donde: p = El profesor ordenó hacer la tarea A
q = El profesor ordenó hacer la tarea B

1.11 LA CONDICIONAL

Es la combinación de dos proposiciones por el conectivo "si ...... , entonces ......" (donde el primer espacio es p y el segundo q)

TABLA DE VERDAD

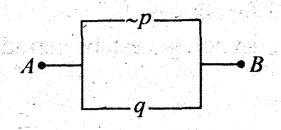
p	q	$p \to q \equiv \sim p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

El conectivo "si ... , entonces ... " se denota por el símbolo "$\to$" o por "$\supset$".

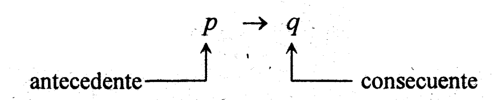
La notación "$p \to q$" se lee "si p, entonces q", donde:

Como $p \to q$, es equivalente a "$\sim p \vee q$", su circuito es en paralelo:



La proposición p se llama antecedente (HIPÓTESIS)

La proposición q se llama CONSECUENTE (TESIS o CONCLUSIÓN).



El principio lógico o regla de la **condicional** es:
La condicional es FALSA, sólo **si el antecedente** es V y el consecuente es F, siendo verdadera en todos los **demás casos.**

La condicional $p \to q$ se lee de tres maneras:
- "si p entonces q"
- "q, sólo sí p"
- "q, si p"

Para construir una condicional $p \to q$, se pone especial cuidado que el **antecedente "p" sea verdadero** porque se supone que sólo a partir de antecedentes verdaderos se deduce que el consecuente q sea verdadero.

Cuando la VERDAD del antecedente (p) lleva necesariamente a la verdad del consecuente (q), diremos que "p implica q" y denotaremos por "$p \Rightarrow q$".

EJEMPLOS:
1) si el pejerrey es un pez, entonces tiene respiración branquial
2) si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces es isósceles.
3) si $A \cap B = B$ entonces $B \subset A$

En (1) se tiene que "$p \Rightarrow q$", porque la verdad de p nos conduce necesariamente a la verdad de q.

p : el pejerrey es un pez ; q : el pejerrey tiene respiración branquial.

Resaltamos la siguiente relación: cuando un condicional es verdadero, diremos que su antecedente implica su consecuencia.

NOTA: Cuando en un párrafo se encuentran los términos: "porque, puesto que, ya que, siempre que, cuando, sí, cada vez que, dado que"; estos términos, también, son conectivos condicionales. Se caracterizan porque después de cada uno de estos términos está el ANTECEDENTE.

EJEMPLO 1

El profesor no controló la asistencia **puesto que** la oficina de la dirección del colegio estaba cerrada y no estaba el portero.

Tenemos: El profesor controló la asistencia $= p$
La oficina de la dirección del colegio estaba cerrada $= q$
El portero estaba $= r$

$$(q \wedge \sim r) \to \sim p$$

EJEMPLO 2 Pedro compra un libro sólo cuando tiene dinero.

Tenemos: Pedro compra un libro $= q$; Pedro tiene dinero $= p$ $\Big\}\ p \to q$ $\longleftarrow$ q, sólo si p

EJEMPLO 3 Doy examen sólo cuando estudio.

Tenemos: Doy examen $= q$; estudio $= p$ $\Big\}\ p \to q$

EJEMPLO 4 Iré de viaje y me divertiré, si me saco la lotería.

Tenemos: Iré de viaje $= q$; me divertiré $= r$; me saco la lotería $= p$ $\Big\}\ p \to q \wedge r$

EJEMPLO 5 Se apagaron las luces porque se interrumpió el fluido eléctrico.

Tenemos: se interrumpió el fluido eléctrico $= p$; se apagaron las luces $= q$ $\Big\}\ p \to q$

EJEMPLO 6 Roberto aprobará el curso puesto que dio buen examen.

Tenemos: Roberto aprobará el curso $= q$; Roberto dio buen examen $= p$ $\Big\}\ p \to q$

EJEMPLO 7 El número entero b es primo, si b es divisible por 1 y por sí mismo.

Tenemos: El número entero b es primo $= p$; b es divisible por 1 $= q$; b es divisible por sí mismo $= r$ $\Big\}\ q \wedge r \to p$

En matemáticas, es corriente aplicar la condicional lógica cada vez que se desea deducir nuevas proposiciones verdaderas. Por ejemplo cuando se quiere demostrar un teorema.

Igualmente, en toda investigación de diversas disciplinas tales como en estadística y ciencias sociales (economía, psicología, sociología, etc.) se hacen inferencias a partir de algunas premisas verdaderas para llegar a una conclusión verdadera.

La proposición condicional está asociada a otras tres proposiciones importantes, estas son: la recíproca, la inversa y la contrarecíproca.

1.11.1 PROPOSICIÓN RECÍPROCA

La proposición recíproca que corresponde a la condicional $p \to q$ es $q \to p$

EJEMPLOS

1) $\underbrace{\text{Si hoy es sábado}}_{p}$, $\underbrace{\text{mañana es domingo}}_{q} \equiv p \to q$

$p \to q$

$\underbrace{\text{Si mañana es domingo}}_{q}$, $\underbrace{\text{hoy es sábado}}_{p} \equiv q \to p$ es el recíproco.

$q \to p$

1.11.2 PROPOSICIÓN INVERSA O CONTRARIO

La proposición inversa que corresponde a la condicional $p \to q$ es $\sim p \to \sim q$.

EJEMPLOS

1) Si hoy es sábado, mañana es domingo $\equiv p \to q$

Si hoy no es sábado, mañana no es domingo $\equiv \sim p \to \sim q$

2) $\underbrace{a \text{ es positivo}}_{q}$, si $\underbrace{a \text{ es mayor que cero}}_{p} \equiv p \to q$

a no es positivo , si a no es mayor que cero $\equiv \sim p \to \sim q$

1.11.3 PROPOSICIÓN CONTRARECÍPROCA

La proposición contrarecíproca que corresponde a la condicional.

$p \to q$ es $\sim q \to \sim p$

EJEMPLOS

1) $\underbrace{a \text{ es positivo}}_{q}$, si $\underbrace{a \text{ es mayor que cero}}_{p}$ $\equiv p \to q$

Si a no es positivo, entonces a no es mayor que cero $\equiv \sim q \to \sim p$

2) Pedro comerá, puesto que tiene hambre ≡ Si $\overbrace{\text{Pedro tiene hambre}}^{p}$, entonces $\overbrace{\text{comerá}}^{q}$ $\equiv p \to q$

Su contrarecíproca es: $\underbrace{\text{Pedro no comerá}}_{\sim q}$ entonces $\underbrace{\text{no tiene hambre}}_{\sim p}$.

1.12 LA BICONDICIONAL

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \leftrightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	1	1	1
V	F	F	1	0	0
F	V	F	0	1	0
F	F	V	0	0	1

La conjunción de los condicionales "$p \to q$" y "$q \to p$", denotada por $(p \to q) \wedge (q \to p)$, se denomina el bicondicional de p y q.

El bicondicional de las proposiciones p y q se simboliza por $p \leftrightarrow q$, que se lee "p si , y solamente si q".

> El principio lógico o regla de la BICONDICIONAL es:
>
> Una PROPOSICIÓN BICONDICIONAL es V si ambas componentes son V o son F, en otro caso es F.

EJEMPLOS

1) $(\underbrace{a^2 = 4}_{p}$ sí , solo si $\underbrace{a = 2 \vee a = -2}_{q})$ $\equiv p \leftrightarrow q$

2) $\underbrace{x^2 < 4}_{p}$ sí , sólo si $\underbrace{-2 < x < 2}_{q}$ $\equiv p \leftrightarrow q$

3) $\underbrace{\overbrace{(-3<x<0)}^{P_1} \vee \overbrace{(0<x<3)}^{P_2}}_{p}$ si, y sólo si $\underbrace{0<x^2<9}_{q} \equiv p \leftrightarrow q$

4) $0<x<3$ si, y sólo si $0<x^2<9 \equiv p \leftrightarrow q$

Las bicondicionales 1, 2 y 3 son verdaderas.

La bicondicional 4 es FALSO, porque $p \rightarrow q$ es V

y $q \rightarrow p$ es F

1.13 LA NEGACIÓN

TABLA DE VERDAD

p	$\sim p$
V	F
F	V

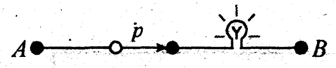
p	$\sim p$
1	0
0	1

Dada una proposición "p", la negación de p es otra proposición que se denota por "$\sim p$" y se lee "no p" o "no es cierto que p".

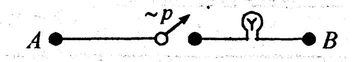
La negación "no", cumple la función de negar una afirmación y de afirmar una negación.

La verdad o falsedad de una NEGACIÓN queda bien determinada por la tabla de verdad.

En circuitos eléctricos se tiene:



"1": "pasa corriente"
si se sierra el interruptor p.



"O": "NO pasa corriente"
si se abre el interruptor p.

NOTA: Cuando en un párrafo se escribe los términos:

a) $\underbrace{\text{"no es el caso"}}_{\sim}$ $\underbrace{\text{...........}}_{A}$

b) $\underbrace{\text{"es falso que"}}_{\sim}$ $\underbrace{\text{...........}}_{A}$, etc. en estos casos

los indicados términos niegan toda la proposición compuesta A.

Es decir: $\sim \underbrace{(\ldots\ldots\ldots)}_{A}$

EJEMPLO 1 "no es el caso que Newton fue matemático y filósofo"
Tenemos:

Newton fue matemático = p
Newton fue filósofo = q
$\sim(p \wedge q)$

EJEMPLO 2 "es falso que pelé jugó en Asia y no estudió en África"

Pelé jugó en Asia = p
Pelé estudió en África = q
$\sim(p \wedge \sim q)$

EJEMPLO 3 "es falso que una buena bicicleta no es barato" $\equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$

"es falso" = $\sim$

Una buena bicicleta no es barato ≡ si una bicicleta es buena , entonces no es barato.

si una bicicleta es buena = p; entonces = $\rightarrow$; no es barato = $\sim q$

EJEMPLO 4 no es el caso que un libro caro es bueno $\equiv \sim(p \rightarrow q)$

"no es el caso" = $\sim$

Se tiene: un libro caro es bueno ≡ si un libro es caro , entonces es bueno

un libro es caro = p; entonces = $\rightarrow$; es bueno = q

La negación, se aplica a la conjunción y la disyunción con excepcionales resultados. Así obtenemos: la negación conjuntiva, la negación alternativa y las leyes de De Morgan.

1.13.1 LA NEGACIÓN CONJUNTIVA

Dados dos proposiciones p y q, definimos la negación conjuntiva de p y q, a la proposición compuesta "$p \downarrow q$" que se lee "ni p ni q"; y es **verdadera sólo cuando sus dos componentes son falsos,** siendo falsa en los otros casos.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \downarrow q$	$p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

Si comparamos la tabla de verdad de $p \downarrow q$ con $p \vee q$, notaremos que $p \downarrow q$ es la negación de $p \vee q$.

Es decir: $p \downarrow q \leftrightarrow \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

se lee "ni p ni q"
"no $p \wedge$ no q"

EJEMPLO: Ni Ricardo Palma fue escritor (p) ni Mariátegui fue poeta (q).

Se simboliza por: $\sim p \wedge \sim q$ o por $p \downarrow q$

1.13.2 LA NEGACIÓN ALTERNATIVA

Dadas dos proposiciones p y q, definimos la negación alternativa de p y q, a la proposición compuesta " $p \mid q$ " que se lee "no p o no q" ; y es verdadero cuando por lo menos uno de sus componentes es falso, es FALSO sólo cuando los dos componentes son VERDADEROS.

TABLA DE VERDAD

p	q	$p \mid q$	$p \wedge q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Si comparamos la tabla de verdad de $p \mid q$ con $p \wedge q$ notaremos que $p \mid q$ es la negación de $p \wedge q$.

Es decir; $p \mid q \leftrightarrow \sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

se lee "no p o no q"

EJEMPLO

"6 no es divisor de 20 o no es número primo"

p : 6 es divisor de 20
q : 6 es número primo

$\sim p \vee \sim q \leftrightarrow p \mid q$

1.14 USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACIÓN.

En un párrafo que se presentan proposiciones simples, conectivos lógicos, comas y puntos se requiere, para su representación simbólica, el buen uso de los signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves).

Los signos de agrupación se usan para indicar la jerarquía de los conectivos lógicos y así evitar las ambigüedades en las FÓRMULAS.

Cuando no se usan correctamente los signos de agrupación las fórmulas carecen de sentido.

EJEMPLOS

(1) Si me aumentan el sueldo y ahorro, viajaré al Cuzco.

La simbolización es:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Me aumentan el sueldo } = p \\ \text{ahorro } = q \\ \text{viajaré al Cuzco } = r \end{array}\right\} (p \wedge q) \rightarrow r$$

En este caso: "→" tiene mayor jerarquía.

(2) O Cubillas juega si le contrata el Alianza Lima, o habrá protesta si no juega.

La simbolización es:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cubillas juega} & = p \\ \text{le contrata el Alianza Lima} & = q \\ \text{habrá protesta} & = r \end{array}\right\} (q \rightarrow p)\ \Delta\ (\sim p \rightarrow r)$$

(3) Las personas nadarán en el mar si la municipalidad da el permiso, si y sólo si el clima no está frío.

La simbolización es:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Las personas nadarán en el mar} & = p \\ \text{La municipalidad da el permiso} & = q \\ \text{El clima está frío} & = r \end{array}\right\} (q \rightarrow p) \leftrightarrow \sim r$$

1.15 LA EVALUACIÓN DE ESQUEMAS MOLECULARES POR LA TABLA DE VALORES.

Son esquemas moleculares:

a) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow p$

b) $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$

c) $(q \rightarrow r) \vee (p \rightarrow r)$

La evaluación de esquemas moleculares consiste en hallar los valores del **operador principal** a partir de la validez de cada una de las proposiciones simples (variables proposicionales).

El número de valores que se asigna a cada variable proposicional depende de la formula 2^n, donde n indica el número de proposiciones simples que existe en el esquema molecular y 2 es una constante que índica los dos valores (V) ó (F) que tiene una proposición simple.

Luego, en una tabla rectangular que la llamaremos TABLA DE VERDAD, se escriben horizontalmente todas las variables proposicionales y el esquema molecular; debajo de las variables proposicionales se escriben, en columna, todas las combinaciones posibles de verdad y falsedad. A continuación se aplica la regla a cada uno de los operadores (conectivos), empezando por el de menor alcance y terminando con el de mayor jerarquía.

1.15.1 TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONSISTENCIA

Tautología:

Denominamos tautología a toda proposición compuesta que es siempre verdadera, cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones componentes (esquema *a*).

Las siguientes proposiciones son tautologías:

a) $p \rightarrow p$, b) $p \vee \sim p$, c) $\sim(p \wedge \sim p)$

Contradicción:

Diremos que una proposición compuesta es una ***contradicción***, si es siempre falsa, cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones componentes.

Un esquema molecular es ***contingente*** cuando en su resultado hay por lo menos una verdad y una falsedad (esquema *c*).

a)

p	q	$[p$	$\wedge$	$(p \rightarrow q)]$	$\rightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F

b)

p	q	r	$[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r]$	$\leftrightarrow$	$[r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$
V	V	V	F F V V F	F	V F F V V F
V	V	F	F F V V V	F	F F F V V F
V	F	V	F F F V F	F	V F F V V V
V	F	F	F F F V V	F	F F F V V V
F	V	V	V V V F F	F	V V V F F F
F	V	F	V V V V V	F	F F V F F F
F	F	V	V F F V F	F	V F F F V V
F	F	F	V F F V V	F	F F F F V V

c)

p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$\vee$	$(\sim p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	F V V
V	V	F	F	V	F V F
V	F	V	V	V	F V V
V	F	F	V	V	F V F
F	V	V	V	V	V V V
F	V	F	F	F	V F F
F	F	V	V	V	V V V
F	F	F	V	V	V F F

1.16 LA EQUIVALENCIA Y LA IMPLICACIÓN.

Sean los esquemas moleculares o fórmulas proposicionales (o simplemente proposiciones compuestas):

$A = \sim p \, \Delta \sim r$

$B = \sim(p \wedge q) \vee \sim r$

$C = \sim(p \wedge q \wedge r)$

Debemos distinguir los conceptos de equivalencia e implicación de los conceptos bicondicional y condicional respectivamente.

La equivalencia y la implicación son relaciones entre **fórmulas proposicionales** mientras que la bicondicional y la condicional son relaciones entre **proposiciones**.

Así tendremos las siguientes definiciones:

1.16.1 LA EQUIVALENCIA

Dos fórmulas B y C son equivalentes cuando unidos por el bicondicional "$\leftrightarrow$" el resultado es una TAUTOLOGÍA.

1.16.2 LA IMPLICACIÓN

Una fórmula A implica a B, cuando unidos por el condicional "$\rightarrow$", siendo A antecedente y B consecuente, el resultado es una TAUTOLOGÍA.

Desarrollando las tablas de verdad correspondiente, tenemos:

			B		C	
p	q	r	$[\sim(p\wedge q)\vee\sim r]$	$\leftrightarrow$	$\sim$	$(p\wedge q\wedge r)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	V	F

Como vemos: B es equivalente a C
y A implica a B

			A			$\Rightarrow$	B			
p	q	r	$[\sim p$	Δ	$\sim r]$	$\rightarrow$	$[\sim$	$(p\wedge q)$	$\vee$	$\sim r]$
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V

NOTA: Cuando B no es equivalente a C, denotamos por $B \not\Leftrightarrow C$
Cuando A no implica a B, denotamos por $A \not\Rightarrow B$

1.17 LA INFERENCIA LÓGICA

La inferencia es el proceso de pasar de un conjunto de **premisas** a una CONCLUSIÓN.

La inferencia es una condicional de la forma:

$$\boxed{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow q} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

A esta condicional, se le llama también, argumento lógico; donde $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ son llamadas premisas y originan como consecuencia otra proposición "q" llamada CONCLUSIÓN.

El resultado de la condicional (I) puede ser una tautología, una contingencia o una contradicción y podemos resumir del siguiente modo:

1) Si la condicional (I) es una tautología, entonces se tiene una **inferencia válida** (o argumento válido).
2) Si la condicional (I) es FALSO entonces se tiene la llamada **falacia**.

TEOREMA Si la condicional (I) es VÁLIDO y las premisas $p_1, p_2, \ldots p_n$ son verdaderas, entonces la conclusión "q" es correcta (V).

EJEMPLO 1 Si Maradona es argentino entonces es aficionado al fútbol. Pero, Maradona no es aficionado al fútbol. Por lo tanto, no es argentino.

Simbolizando:

Maradona es argentino $= p$
Maradona es aficionado al fútbol $= q$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow \sim q$$

La tabla de verdad es:

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim q)]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Son premisas : $(p \rightarrow q), \sim q$

La conclusión es : $\sim p$

Como resultado es una TAUTOLOGÍA, la conjunción de premisas implica a la conclusión, por lo tanto la inferencia es válida.

EJEMPLO 2 Como es hora de clases, se concluye que en el aula hay profesores y alumnos, dado que, si es hora de clases, en el aula hay profesores, y hay alumnos si en el aula hay profesores.

Simbolización:
Tener en cuenta que después del término "dado que" viene el ANTECEDENTE de la condicional que se formará.

Sean las proposiciones simples:
Es hora de clases $= p$
En el aula hay profesores $= q$
En el aula hay alumnos $= r$

1) El ANTECEDENTE está formado por la conjunción de las siguientes proposiciones:
$$(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p$$
2) El consecuente o conclusión es: $q \wedge r$
3) La inferencia será: $[(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p] \to [q \wedge r]$
4) Al desarrollar en una TABLA DE VERDAD resultará una TAUTOLOGÍA, lo cual indicará que la inferencia es válida.

EJEMPLO 3 "Si Juan participa en un comité electoral de la universidad entonces los estudiantes se enojarán de él, y si no participa en un comité electoral de la universidad entonces las autoridades universitarias se enojaran con él. Pero, Juan participará en un comité electoral de la universidad o no participará. Por lo tanto, los estudiantes o las autoridades universitarias se enojarán con él".

Simbolización:

1) Sean las proposiciones simples:
Juan participará en un comité electoral $= p$
Los estudiantes se enojaran con él $= q$
Las autoridades universitarias se enojarán con Juan $= r$

2) Formalizando el enunciado tenemos:
a) Las premisas son: $(p \to q) \wedge (\sim p \to r) \wedge (p \vee \sim p)$
b) La conclusión es: $q \vee r$

3) La inferencia será: $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r) \wedge (p \vee \sim p)] \rightarrow [q \vee r]$

Al desarrollarse en una TABLA DE VERDAD, obtendremos una TAUTOLOGÍA, lo cual indica que la inferencia es válida.

EJEMPLO 4 "Si Anito decía la verdad, entonces Sócrates corrompía a la juventud y si el tribunal lo condenó equivocadamente, entonces Anito no es el culpable. Pero, Sócrates no corrompía a la juventud o Anito es el culpable. Por lo tanto Anito no decía la verdad o el tribunal no condenó a Sócrates equivocadamente".

Simbolización:

1) Sean las proposiciones simples:

p = Anito decía la verdad.
q = Sócrates corrompía a la juventud.
r = El tribunal condenó equivocadamente a Sócrates.
s = Anito es el culpable.

2) La formalización del esquema molecular será:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s) \wedge (\sim q \vee s)] \rightarrow [\sim p \vee \sim r]$$

1.17.1 EL MÉTODO ABREVIADO

El desarrollo de la tabla de valores de la inferencia $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ resulta muy laborioso cuando se desea saber su validez. Para evitar este engorroso y laborioso trabajo se utiliza un MÉTODO ABREVIADO de fácil manejo y de gran precisión.

El MÉTODO ABREVIADO, consiste en analizar la única posibilidad de ser FALSO la condicional: $p \rightarrow q$

V F
(F)

Como podemos apreciar, la condicional es (F) sólo cuando el antecedente es V y el consecuente es F.

La validez de la condicional: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$

Se analiza siguiendo los siguientes pasos:

1º Asignar el valor de V (verdadero) a cada una de las premisas p_i y de F (falso) a la conclusión.
Como el antecedente es una conjunción de n premisas y es V, entonces cada premisa p_i necesariamente será verdadero.

Así tendremos: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \overset{(F)}{\rightarrow} q$

V V V V (F)

V

2º Deducir el valor de cada una de las variables proposicionales, teniendo en cuenta las reglas para $\wedge, \vee, \rightarrow, \Delta, \sim$ que se pueden presentar en cada premisa.

LA DECISIÓN

3º Si cada una de las variables proposicionales tiene UN SOLO VALOR, entonces la inferencia no es válida. Es decir no hay implicación puesto que la conjunción de premisas es V y la conclusión es F.

4º Si una variable proposicional llega a tener DOS VALORES A LA VEZ (V y F), entonces quedará demostrado que no es posible que la conjunción de premisas sea V, y la conclusión F. Por lo tanto, hay implicación y la inferencia es válida.

EJEMPLO 5

1) Analizar la inferencia del EJEMPLO 4

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s) \wedge (\sim q \vee s)] \rightarrow [\sim p \vee \sim r]$$

V V V

V V (V) V V (V) F F (V) F F (F)

Analicemos:

1º Asignar (F) a la conclusión $\sim p \vee \sim r$ y (V) a cada premisa.

F F (F)

2º Deducir el valor de p , q , r , s a partir de los valores, que ya se tiene en la conclusión $\sim p \vee \sim q$ y en la premisa $p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim s$, $\sim q \vee s$.

Se empieza, por la conclusión $\sim p \vee \sim r$.

Si $\sim p \vee \sim r$ es F, entonces $\sim p$ es F y $\sim r$ es F. Ahora, si $\sim p$ es F entonces $\boxed{p \text{ es } V}$; de manera similar, si $\sim r$ es F entonces $\boxed{r \text{ es } V}$.

Con los valores de p y r, se analiza la validez de cada premisa.

p_1 $p \rightarrow q$ (V V, ⓥ) • Ya tenemos que p es V. Como $p \rightarrow q$ es ⓥ, entonces $\boxed{q \text{ es V}}$

p_2 $r \rightarrow \sim s$ (V V, ⓥ) • Ya tenemos que r es V. Como $r \rightarrow \sim s$ es V, entonces $\sim s$ es V y en consecuencia. $\boxed{s \text{ es } F}$.

p_3 $\sim q \vee s$ (F F, ⓥ) • En p_1 hemos obtenido: $\boxed{q \text{ es V}}$ y en p_2 se obtuvo que $\boxed{s \text{ es V}}$. Como "$\sim q \vee s$" es ⓥ y $\sim q$ es F , entonces $\boxed{s \text{ es V}}$

3º $\boxed{p \text{ es V}}$, $\boxed{q \text{ es V}}$, $\boxed{s \text{ es Ⓕ y ⓥ}}$

↑ contradicción

4º Hemos hallado una contradicción: $\boxed{s \text{ es F}}$ y $\boxed{s \text{ es V}}$. Esta contradicción nos indica que la condicional

$$\underbrace{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s) \wedge (\sim q \wedge s)]}_{m} \xrightarrow{Ⓕ} \underbrace{[\sim p \vee \sim r]}_{n}$$

no es FALSO, sinó verdadero.

Esto es "m implica n". Dicho de otra manera: de las premisas $p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim s$ y $\sim q \wedge s$ se ha inferido $\sim p \vee \sim r$.

EJEMPLO 6 Analizar la inferencia de EJEMPLO 3.

$$[(p \to q) \wedge (\sim p \to r) \wedge (p \vee \sim p)] \to (p \vee r)$$

Solución:

1º Asignar (F) a la conclusión $p \vee r$ y (V) a cada premisa $p \to q$, $\sim p \to r$, $p \vee \sim p$.

$$\underset{\text{(V)}}{[(p \to q)} \wedge \underset{\text{(V)}}{(\sim p \to r)} \wedge \underset{\text{(V)}}{(p \vee \sim p)]} \to \underset{\text{(F)}}{(p \vee r)}$$

2º Hallar los valores de p , r , q , teniendo en cuenta los valores de la conclusión y de las premisas.

Veamos:

Si la conclusión "$p \vee r$" es (F) entonces

$$\underset{F}{p} \underset{(F)}{\vee} \underset{F}{r}$$

p es F y r es F , porque tenemos una disyunción.

Ahora analicemos cada premisa.

En p_1 : $\underset{F}{p} \underset{(V)}{\to} q$ • Si p es F y $p \to q$ es V, entonces q puede ser V o F

En p_2 : $\underset{V}{\sim p} \underset{(V)}{\to} \underset{V}{r}$ • Como p es F , entonces $\sim p$ es V . Ahora, si $\sim p$ es V y $\sim p \to r$ es (V), entonces r es V

En p_3 : $\underset{F}{p} \underset{(V)}{\vee} \underset{V}{\sim p}$ • Si p es F y $p \vee \sim p$ es (V), entonces $\sim p$ es V. Aquí, hay compatibilidad.

3º p es F , r es F , q es V o F

4º En p_1 , existe contradicción. Por lo tanto, la inferencia dada es válida.

EJEMPLO 7 Analizar la validez de la siguiente inferencia.

$$[(\sim p \leftrightarrow (\sim p \vee r)) \wedge (r \to s)] \to [s \to \sim p]$$

***Solución*:**

1° Asignar (F) a la conclusión: $s \to \sim p$ y (V) a cada premisa $(\sim p \leftrightarrow (\sim p \vee r))$, $r \to s$.

$$[(\sim p \leftrightarrow (\sim p \vee r)) \wedge (r \to s)] \to [s \to \sim p]$$

(V) (V) (F)

2° Hallar los valores de s, p, r.

Empezamos por la conclusión:

Si $s \to \sim p$ es (F), entonces s es V y $\sim p$ es F.

(F)

Luego, p es V

Ahora, analicemos cada premisa:

$p_1)$ $\sim p \leftrightarrow (\sim q \vee r)$

F F F F (V)

- Tenemos p es V, entonces $\sim p$ es F.

  Si $\sim p$ es F y la bicondicional es V, entonces $(\sim p \vee r)$ es F.

Ahora, si $\sim p \vee r$ es F entonces $\sim p$ es F y r es F.

Aquí, hay compatibilidad.

$p_2)$ $r \to s$

F V (V)

- Hasta ahora, tenemos s es V y r es F.

  Si s es V y $r \to s$ es V, entonces r es V o F. Por p_1 se obtuvo que r es F; por lo tanto, el único valor de r es F.

3° s es V, p es V, r es F

4° Porque los valores de cada variable son únicos, afirmamos que la **inferencia no es válida.**

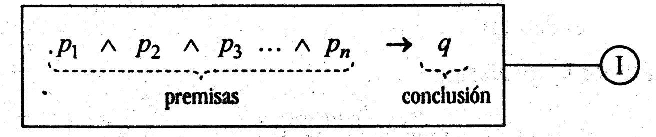
1.17.2 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

En la demostración de muchos teoremas y otras proposiciones que se presentan en el álgebra y en el ANÁLISIS (análisis real, topología, geometría, etc.) se aplican ordenadamente los pasos lógicos agotando todas las premisas (antecedentes o hipótesis) para verificar la conclusión (consecuente o tesis).

1.18 Hay dos métodos para demostrar una PROPOSICIÓN

(1) MÉTODO DIRECTO DE DEMOSTRACIÓN

Consiste en utilizar la validez de la inferencia de la forma:

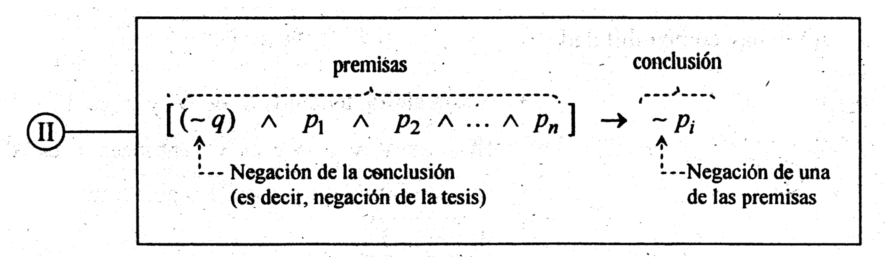


En esta forma de demostración, se utilizan todas las premisas p_i, paso a paso, hasta verificar la conclusión q.

(2) MÉTODO POR REDUCCIÓN AL ABSURDO (O MÉTODO INDIRECTO)

Este método consiste en negar la conclusión q y considerarla como premisa, luego se trata de inferir válidamente la NEGACIÓN de alguna de las premisas p_i del conjunto $\{p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n\}$.

Es decir, se construye y se verifica la validez de la siguiente inferencia:



Para ambos métodos, si la conclusión se deduce correctamente del conjunto de premisas, la inferencia es válida (o también se dice que el conjunto de premisas implica a la conclusión, o la conclusión es consecuencia lógica del conjunto de premisas).

Pero, si la conclusión no se deduce correctamente del conjunto de premisas, entonces la inferencia no es válida.

Observación: El esquema lógico (II) es equivalente al esquema lógico (I)

Probemos: $[(\sim q) \wedge p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n] \rightarrow \sim p_2$

$\equiv \sim[(\sim q) \wedge p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n] \vee \sim p_2$ (se ha aplicado: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$)

$\equiv [q \vee \sim(p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots p_n)] \vee \sim p_2$ (por ley de Morgan)

$\equiv q \vee [\sim(p_1 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \vee \sim p_2]$ (Propiedad asociativa)

$\equiv q \vee [\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge p_n)]$ (por ley de Morgan)

$\equiv [p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n] \rightarrow q$

EJEMPLO 1 Por los dos métodos: Directo e indirecto comprobar la validez de la siguiente inferencia lógica o argumento lógico.

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

a) MÉTODO DIRECTO

$[\sim p \wedge (p \wedge q)] \rightarrow q$

$\equiv \sim[\sim p \wedge (p \wedge q)] \vee q$

$\equiv [p \vee \sim(p \wedge q)] \vee q$

$\equiv p \vee [q \vee \sim(p \wedge q)]$

$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee \sim(p \wedge q)}$

$\equiv$ V

$\equiv$ TAUTOLOGIA

b) MÉTODO INDIRECTO.

Negar la conclusión y considerarlo como premisa.

Negar la premisa "$\sim p$" y considerarlo como conclusión.

$[\sim q \wedge (p \wedge q)] \rightarrow p$

$\equiv \sim[\sim q \wedge (p \wedge q)] \vee p$

$\equiv [q \vee \sim(p \wedge q)] \vee p$

$\equiv q \vee [p \vee \sim(p \wedge q)]$

$\equiv (q \vee p) \vee \sim(p \wedge q)$

$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee \sim(p \wedge q)}$

$\equiv$ V

$\equiv$ TAUTOLOGÍA

EJEMPLO 2 Probar que el número $\sqrt{2}$ no es racional.

La prueba es por el MÉTODO POR REDUCCIÓN AL ABSURDO.

1) Suponer que $\sqrt{2}$ es racional.
2) Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces **existen dos números enteros *m* y *n* primos entre sí**, tal que $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$.
3) Si $\sqrt{2}=\frac{m}{n} \Rightarrow 2=\frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2=2n^2$ .... (3*)
4) Como $m^2=2n^2$, con n entero; entonces m^2 es par, también m será par.
5) Como m es par $\Rightarrow$ m es de la forma $\boxed{m=2K}$ para algún entero K.
6) Remplazar el valor $m=2K$ en (3*): $(2K)^2=2n^2 \Rightarrow 2n^2=4K^2$
$\Rightarrow n^2=2K^2$
7) Como $n^2=2K^2 \Rightarrow n^2$ es par, también n será par.
8) Como n es par $\Rightarrow$ n es de la forma $\boxed{n=2\ell}$ para algún entero ℓ.
9) Por 5) y 8) tenemos: $m=2K$ y $n=2\ell$, lo cual indica que ***m* y *n* tienen como factor común al número 2**. Esto contradice a la hipótesis auxiliar del paso 2) donde dijimos que ***m* y *n* eran enteros primos entre sí.**

NOTA: Si m y n son primos entre sí significa que no tienen factores comunes, excepto la unidad.

10) La contradicción se presenta porque en el paso 1) hemos supuesto que $\sqrt{2}$ es racional.
11) **CONCLUSIÓN:** Por tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

1.19 PRINCIPALES LEYES LÓGICAS O TAUTOLOGÍAS

En la lógica existen los llamados "PRINCIPIOS LÓGICOS" o "LEYES LÓGICAS" que vienen a ser FORMAS PROPOSICIONALES TAUTOLÓGICAS de carácter general. A partir de las "leyes lógicas" se pueden generar otras tautologías y a la vez cualquier tautología se puede reducir a una de las "leyes lógicas".

Las principales leyes lógicas las podemos clasificar en tres grupos:

Grupos
- Leyes lógicas clásicas.
- Equivalencias notables.
- Implicaciones notables.

(I) LOS TRES PRINCIPIOS LÓGICOS CLÁSICOS

C.1 : LEY DE IDENTIDAD (REFLEXIVIDAD)

$$p \rightarrow p$$
$$p \leftrightarrow p$$

"Una proposición solo es idéntica a sí mismo"

C.2 : LEY DE NO CONTRADICCIÓN

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

"Una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez"

C.3 : LEY DE TERCIO EXCLUIDO

$$p \vee \sim p$$

"Una proposición o es verdadera o es falsa, no hay una tercera posibilidad"

(II) EQUIVALENCIAS NOTABLES

E_1 : LEY DE LA DOBLE NEGACIÓN (INVOLUCIÓN)

$$\sim (\sim p) \equiv p$$

"La negación de la negación es una afirmación"

E_2 : LA IDEMPOTENCIA

a) $p \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \equiv p$

En general: $p \wedge p \wedge p \wedge \ldots \wedge p \equiv p$

$p \vee p \vee p \vee \ldots \vee p \equiv p$

Las variables redundantes en una cadena de conjunciones o en una cadena de disyunciones, se eliminan.

E_3: LEYES CONMUTATIVAS

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
b) $p \vee q \equiv q \vee p$
c) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

"La conjunción, la disyunción y la bicondicional de dos proposiciones son conmutativas"

E_4: LEYES ASOCIATIVAS

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
c) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

E_5: LEYES DISTRIBUTIVAS

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
c) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
d) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

E_6: LEYES DE De MORGAN

a) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
b) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

E_7: LAS LEYES DEL CONDICIONAL

a) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
b) $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

E_8 : LAS LEYES DEL BICONDICIONAL

a) $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
b) $(p \leftrightarrow q) \equiv \sim[(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)]$
$\equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

Donde: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$
$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}] \vee [\underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee (q \wedge p)]$
$\equiv [\sim(p \vee q)] \vee [p \wedge q)]$ $\equiv \sim[(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)]$
$\equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

E_9 : LEYES DE LA ABSORCIÓN

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
b) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

E_{10} : LEYES DE TRANSPOSICIÓN

a) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
b) $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

E_{11} : LEYES DE EXPORTACIÓN

a) $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_n) \rightarrow r \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots\ldots \wedge p_{n-1})] \rightarrow (p_n \rightarrow r)$

E_{12} : ELEMENTOS NEUTROS PARA LA CONJUNCIÓN Y DISYUNCIÓN

Si V = VERDADERO (tautología) y F = FALSO (contradicción)

a) $p \wedge \mathrm{V} \equiv p$ — "V" es el neutro de la conjunción.
b) $p \vee \mathrm{F} \equiv p$ — "F" es el neutro de la disyunción.

(III) IMPLICACIONES NOTABLES

Las implicaciones notables se pueden escribir de dos formas: en forma horizontal y en forma vertical.

a) **FORMA HORIZONTAL.-** Cuando la conjunción de premisas que implican a la conclusión $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$ se escriben horizontalmente en forma explícita usando los conectivos: $\wedge , \to$

b) **FORMA VERTICAL** (FORMA CLÁSICA).- En este caso no se escriben, en forma explícita los conectivos: $\wedge$, $\to$. La conjunción de premisas se escriben verticalmente uno después de otra y al término de la última premisa se escribe una raya horizontal y tres puntos para luego escribir la conclusión. El razonamiento es "si ocurren $p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n$; por tanto ocurre q".

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

I_1 : LEY DE MODUS PONENS

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{r} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

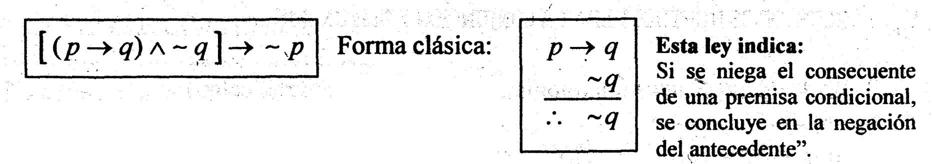
Esta ley indica:
Si se afirma el antecedente de una premisa condicional, se concluye en la afirmación del consecuente.
Son premisas: $p \to q$, p
la conclusión: p

Ejemplo:

"Si 2 es divisor de 4 , entonces 2 es divisor de 4^3
"2 es divisor de 4"

Por tanto: "2 es divisor de 4^3

I_2 : LEY DEL MODUS TOLLENS



$$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{r} p \to q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

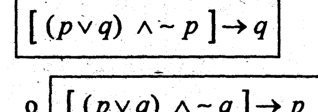
Esta ley indica:
Si se niega el consecuente de una premisa condicional, se concluye en la negación del antecedente".

Ejemplo:

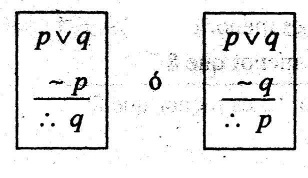
"Si Jorge estudió entonces aprobó Matemáticas"
Jorge no aprobó Matemáticas

Luego: "Jorge no estudió"

I_3 : LEY DEL SILOGISMO DISYUNTIVO



Forma clásica:



Está ley afirma: "Si se niega uno de los miembros de una premisa disyuntiva, se concluye en la afirmación del otro miembro".

Ejemplo:

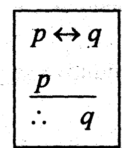
"x es número par o múltiplo de 5"
"x no es par"

$\therefore$ "x es múltiplo de 5"
↑
Se lee "por lo tanto"
"luego"

I_4 : LEY DE LA INFERENCIA EQUIVALENTE

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Forma clásica:



Esta ley indica: "Si uno de los miembros de la premisa bicondicional es verdadero, entonces el otro miembro es verdadero"

Ejemplo:

"a es u número primo, si y sólo si es múltiplo de 1 y de a"
"es múltiplo de a y de 1"

$\therefore$ "a es número primo"

I_5 : LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Esta ley indica que el condicional es transitivo.

Ejemplo:

" si 3 es menor que 5 "
" 5 es menor que 8 "
Luego: "3 es menor que 8"

I_6 : LEY DE LA TRANSITIVIDAD SIMÉTRICA

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \to (p \leftrightarrow r)$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \leftrightarrow r \\ \hline \therefore p \leftrightarrow r \end{array}$$

Esta ley indica que la bicondicional es transitiva.

Ejemplo:

" 2 divide a x , si y sólo si x es par"
" x es par, si y sólo si es múltiplo de 2"
∴ "2 divide a x , si y sólo si x es múltiplo de 2"

I_7 : LEY DE LA SIMPLIFICACIÓN

De una premisa conjuntiva se puede concluir en cualquiera de sus miembros:

$$(p \wedge q) \to p$$
o
$$(p \wedge q) \to q$$

Forma clásica:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Ejemplo:

"Juan y Manuel son menores de edad", por lo tanto, "Juan es menor de edad".

I_8 : LEY DE ADICIÓN

Una disyunción está implicada por cualquiera de sus miembros.

$$p \to (p \vee q) \quad \text{o} \quad q \to (p \vee q)$$

Forma clásica: $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$ ó $\dfrac{q}{\therefore p \vee q}$

Ejemplo:

"Ricardo Palma escribió Tradiciones Peruanas", por lo tanto, "escribió Tradiciones Peruanas" o "fue un gran poeta".

I_9 : LEY DEL ABSURDO

a) $[p \to (q \wedge \sim q)] \to \sim p$

b) $[\sim p \to (q \wedge \sim q)] \to p$

RESUMEN

Para efectuar una buena simplificación en el álgebra proposicional, tener en cuenta las siguientes leyes lógicas:

N_1) $\sim V \equiv F$

N_2) $\sim F \equiv V$

N_3) $\sim(\sim p) \equiv p$

C_1) $p \wedge p \equiv p$

C_2) $p \wedge F \equiv F$

C_3) $p \wedge V \equiv p$

C_4) $p \wedge (\sim p) \equiv F$

C_5) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

C_6) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

C_7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

D_1) $p \vee p \equiv p$

D_2) $p \vee F \equiv p$

D_3) $p \vee V \equiv V$

D_4) $p \vee \sim P \equiv V$

D_5) $p \vee q \equiv q \vee p$

D_6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

D_7) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

I_1) $p \to q \equiv \sim p \vee q$

I_2) $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

I_3) $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

B_1) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

B_2) $p \,\Delta\, q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

$\equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

$\equiv \sim(p \leftrightarrow q)$

A_1) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

A_2) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

A_3) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

A_4) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

M_1) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

M_2) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

1.20 RESUMEN (lógica – circuitos lógicos – conjuntos)

TABLA DE VERDAD

	CONJUNCIÓN	DISYUNCIÓN INCLUSIVA	CONDICIONAL	BICONDICIONAL	DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE	NEGACIÓN CONJUNTIVA	INCOMPATIBILIDAD DE DOS PROPOSICIONES. "NEGACIÓN ALTERNATIVA"
Se lee :	"p y q"	"p o q"	"p sólo si q" "si p entonces q" "q , si p"	"p si y sólo si q"	"p o q , pero no ambos" "o p , o q"	"ni p , ni q "no p y no q"	"no p" o "no q"
p q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$ $\equiv \sim p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \Delta q$ $\equiv \sim(p \leftrightarrow q)$ $\equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ $\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	$p \downarrow q$ $\equiv \sim(p \vee q)$ $\equiv \sim p \wedge \sim q$	$p \mid q$ $\equiv \sim(p \wedge q)$ $\equiv \sim p \vee \sim q$
V V V F F V F F	(V) F F F	V V V (F)	V (F) V V	(V) F F (V)	F V V F	F F F V	F V V V
CIRCUITOS LÓGICOS	A —p—q— B EN SERIE	A [p / q] B EN PARALELO	A [$\sim p$ / q] B		[p – $\sim q$ / $\sim p$ – q]	—$\sim p$—$\sim q$—	[$\sim p$ / $\sim q$]
OPERACIONES CON CONJUNTOS * INTERSECCIÓN * UNIÓN * INCLUSIÓN * DIFERENCIA SIMÉTRICA	P Q $P \cap Q$ INTERSECCIÓN	P Q $P \cup Q$ UNIÓN	Q P $P \subset Q$ INCLUSIÓN	$P = Q$ $\leftrightarrow P \subset Q \wedge Q \subset P$ IGUALDAD	P Q $P \Delta Q$ $(P-Q) \cup (Q-P)$ $(P \cup Q) - (P \cap Q)$ $(P \cap Q') \cup (Q \cap P')$ DIFERENCIA SIMÉTRICA	P Q $(P \cup Q)'$ $P' \cap Q'$ COMPLEMENTO DE LA UNIÓN	P Q $(P \cap Q)'$ $P' \cup Q'$ COMPLEMENTO DE LA INTERSECCIÓN

1.20.1 CONDICIÓN NECESARIA Y CONDICION SUFICIENTE

Para formalizar la demostración de muchas proposiciones, en matemáticas, a menudo se presentan formas condicionales de:

$p \to q$ se lee "si p, entonces q"

ó $q \to p$ se lee "si q, entonces p"

El proceso de demostración consiste en probar si $p \to q$ es verdadera o $q \to p$ es verdadera, o que ambas condicionales son verdaderas.

Para ello, si tenemos dos proposiciones p y q, se fija una de ellas, digamos $\boxed{p}$; luego se prueba la validez de las proposiciones condicionales: $\boxed{p} \to q$ y $q \to \boxed{p}$.

De esta prueba, se pueden obtener alguno de los siguientes resultados:

1) Si: $\boxed{p} \to q$ es **VERDADERO**, diremos que $\boxed{p}$ es **CONDICIÓN SUFICIENTE** para q.

2) Si $q \to \boxed{p}$ es **VERDADERO**, diremos que $\boxed{p}$ es **CONDICIÓN NECESARIA** para q.

3) Si $\boxed{p} \to q$ es VERDADERA, $\wedge$ $q \to \boxed{p}$ es VERDADERA; entonces decimos que $\boxed{p}$ es CONDICIÓN NECESARIA y SUFICIENTE para q.

Es el 3^{er} caso, donde se usa la notación: $p \leftrightarrow q$ para indicar que p es C N. y C S. para q o también se dice "p si y sólo si q".

PROBLEMAS:

① Indicar en cuáles de los siguientes casos es p condición suficiente para q; en cuáles es p condición necesaria y suficiente para q.

a) p : a es múltiplo de 4
q : a es número par

b) p : a y b son números pares
q : $a + b$ es par.

PRUEBA DE a)

1. Fijemos la proposición $\boxed{p}$: "a es múltiplo de 4".
2. Luego a es la forma de $a = 4n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.
3. Pero $a = 4n = 2(2n)$

   $q : a = 2K$ ← indica que a es par.

4. Es decir, la condicional $\boxed{p} \longrightarrow q$ es VERDADERO. Por lo tanto, afirmamos que p es CONDICIÓN SUFICIENTE para q.
5. ¿Será verdadero $q \longrightarrow \boxed{p}$?

   Es decir si a es par ¿implica que "a" es múltiplo de 4?

   Veamos:

6. Si a es par, entonces tiene la forma $a = 2n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
7. Como n es un entero cualquiera, puede ser par $(n = 2K)$, pero también puede ser impar $(n = 2K+1)$.
8. Cuando $p : a = 2\,(2K) = 4K$, no hay ningún problema, pero si

   $p : a = 2\,(2K+1) = 4K+2$ no es múltiplo de 4.

9. Luego, la condicional $q \longrightarrow \boxed{p}$ será falso.

   $\underset{V}{q} \longrightarrow \underset{F}{p}$: F

10. Por tanto, $\boxed{p}$ no es condición necesaria para q.

PRUEBA DE b)

1. Fijemos $\boxed{p}$: a y b son pares
2. Luego: $a = 2n \quad \wedge \quad b = 2n$.
3. La suma $q : a + b = 2\,(n + m)$ es par.
4. Por tanto, $\boxed{p} \longrightarrow q$ es verdadero.
5. En consecuencia $\boxed{p}$ es C.S. para q.
6. ¿Será verdadero la condicional $q \longrightarrow \boxed{p}$?

Veamos:

7. $q: a+b=2n$ es par $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

8. Que la suma $a+b$ sea número par indica que a y b sean pares, pero también pueden ser impares, digamos:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2K+1 \\ b = 2m+1 \end{array}\right\} a+b = 2(K+m+1)$$

Un ejemplo particular: si $a+b=8$, pueden ser $a=5$, $b=3$

9. Por tanto, $\underset{V}{q} \longrightarrow \underset{F}{\boxed{p}}$ es F.

$\quad\quad$ F

10. En consecuencia, $\boxed{p}$ no es C.N. para q.

(2) Dado el conectivo lógico * definido por la siguiente tabla de verdad:

$p\,q$	$p*q$
V V	V
V F	F
F V	V
F F	F

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

(a) $q \equiv V$ es condición necesaria o suficiente para que $(p * q) \equiv$ V

(b) $\sim p*\left[(p \wedge q)*(r \wedge s)\right] \equiv r \wedge s$

(c) Es falso que $(p \rightarrow q) \equiv F$ sea condición necesaria y suficiente para $p*q \equiv F$.

(3) "Para que una matriz tenga inversa es necesario que su determinante sea diferente de cero".

¿Cuáles de las siguientes proposiciones se deduce de ésta? Justifique lógicamente. (no se requiere saber de matrices).

a_1) Para que una matriz tenga inversa es suficiente que su determinante sea cero".

a_2) Para que su determinante sea diferente de cero es suficiente que la matriz tenga inversa.

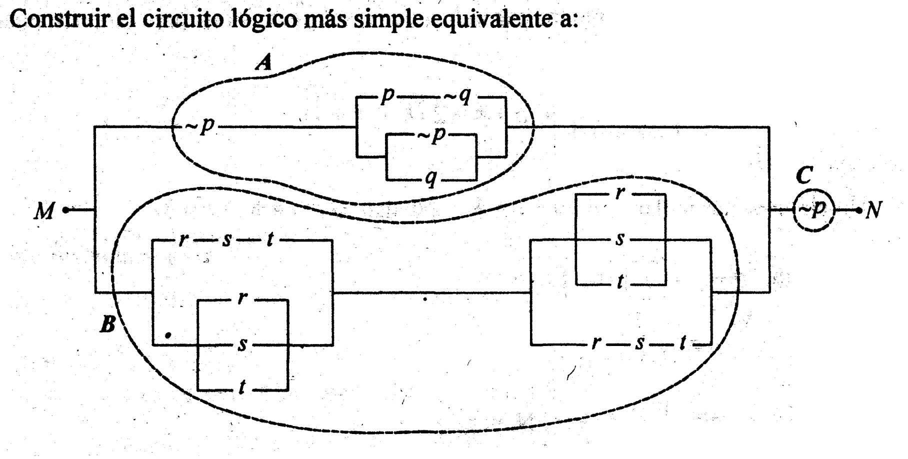
a_3) Para que su determinante sea cero es necesario que la matriz no tenga inversa.

a_4) Una matriz tiene inversa sólo si su determinante no es cero.

1.21 PROBLEMAS RESUELTOS

GRUPO 1 : CIRCUITOS LÓGICOS

1 Construir el circuito lógico más simple equivalente a:



Solución:

Podemos resolver por bloques:

i) $(A \vee B) \wedge C$

ii) Donde:

A : $\sim p \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)]$

B : $\left[(r \wedge s \wedge t) \vee (r \vee s \vee t)\right] \wedge \left[(r \vee s \vee t) \vee (r \wedge s \wedge t)\right]$

C : $\sim p$

iii) Aplicar propiedades en cada bloque:

A: $\sim p \wedge \left[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)\right] \equiv$

$\equiv \sim p \wedge \left[\underbrace{(p \wedge \sim q) \vee \sim (p \wedge \sim q)}_{T}\right]$

$\equiv \sim p \wedge T \equiv \sim p$

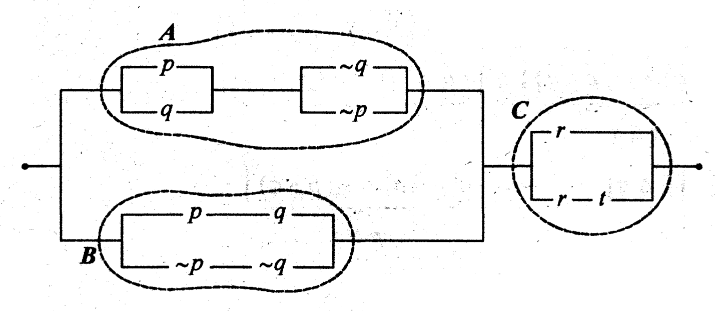
B: $\equiv \left[\underbrace{(r \wedge s \wedge t) \vee (r \vee s \vee t)}\right] \wedge \left[\underbrace{(r \vee s \vee t) \vee (r \wedge s \wedge t)}\right] \equiv$

$\equiv \left[r \vee s \vee t\right] \wedge \left[r \vee s \vee t\right] \equiv \left[r \vee s \vee t\right]$

iv) Remplazar en *i*)

$$(A \vee B) \wedge C \equiv [\sim p \vee (r \vee s \vee t)] \wedge \sim p \equiv \sim p \qquad M \bullet\!\!-\!\!- \sim p -\!\!-\!\!\bullet N$$

2 Hallar la proposición equivalente más simplificada del siguiente circuito lógico.



Solución:
Resolviendo por bloques

i) $(A \vee B) \wedge C$

ii) Donde:

$A: \; [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)] \equiv [(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)] \equiv p \,\Delta\, q$

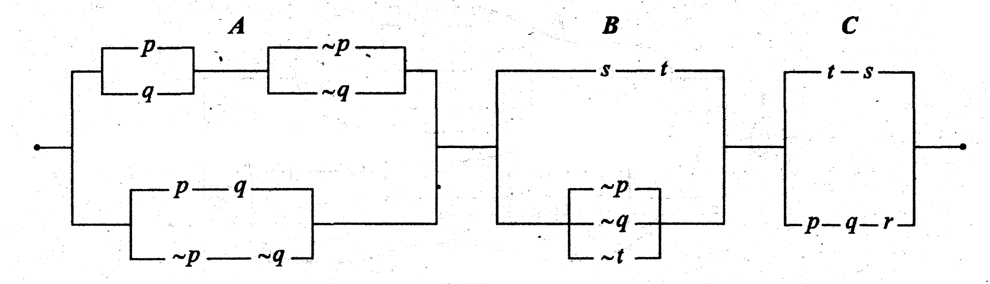
$B: \; [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \equiv [(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)] \equiv \sim[\sim(p \wedge q) \wedge (p \vee q)]$

$C: \; [\, r \vee (r \wedge t)] \equiv r \qquad\qquad \equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

iii) Remplazar en *i*)

$$(A \vee B) \wedge C \equiv [\underbrace{(p \,\Delta\, q) \vee \sim(p \,\Delta\, q)}_{T}] \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$

3 Diseñar el circuito lógico más simple equivalente al circuito:



***Solución*:**

Resolver por bloques

i) $A \wedge B \wedge C$

ii) Donde

A: $\left[(p\vee q)\wedge(\sim p\vee \sim q)\right] \vee \left[(p\wedge q) \vee (\sim p\wedge \sim q)\right]$

$\equiv \left[\underbrace{(p\vee q)\wedge \sim (p\wedge q)}_{p\,\Delta\, q}\right] \vee \left[\underbrace{(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)}\right]$

$\equiv \quad [p\,\Delta\, q] \quad \vee \sim\left[\underbrace{(p\vee q)\wedge \sim (p\wedge q)}_{p\,\Delta\, q}\right]$

$\equiv (p\,\Delta\, q) \vee \sim (p\,\Delta\, q) \equiv T$

B: $(s\wedge t) \vee (\sim p\vee \sim q\vee \sim t) \equiv (s\wedge t) \vee \sim (p\wedge q\wedge t)$

C: $(t\wedge s) \vee (p\wedge q\wedge r)$

iii) Remplazar en *i*)

$A \wedge B \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \equiv T \wedge (B \wedge C) \equiv B \wedge C$

Donde:

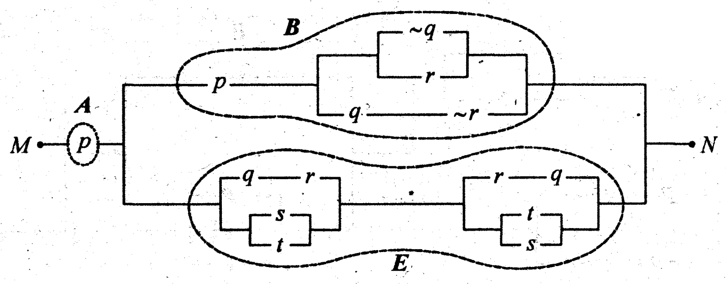
$B \wedge C\left[\underline{(s\wedge t)\vee \sim} \vee \sim (p\wedge q\wedge t)\right] \wedge \left[\underline{(s\wedge t)}\vee (p\wedge q\wedge t)\right]$

$\equiv (s\wedge t) \vee [\underbrace{\sim(p\wedge q\wedge t)\wedge(p\wedge q\wedge t)}_{C}]$

$\equiv$

$\equiv (s\wedge t) \vee C \equiv s\wedge t$ $\qquad$ •— s — t —•

4 **Construir el circuito lógico más simple equivalente a:**



***Solución*:**

Resolviendo por bloques:

i) $A \wedge (B \vee E)$

ii) Donde:

A: p

B: $p \wedge [(\sim q \vee r) \vee (q \wedge \sim r)] \equiv p \wedge [\underbrace{(\sim q \vee r) \vee \sim(\sim q \vee r)}_{T}]$

$$\equiv p \wedge T$$

$$\equiv p$$

E: $[(q \wedge r) \vee (s \vee t)] \wedge [(r \wedge q) \vee (t \vee s)] \equiv$

$\equiv [(q \wedge r) \vee (s \vee t)] \wedge [(q \wedge r) \vee (s \vee t)] \equiv [\underbrace{(q \wedge r) \vee (s \vee t)}_{E}]$

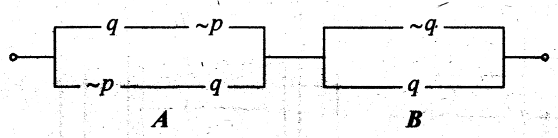
$\equiv \quad E$

iii) Reemplazar en *i*)

$A \wedge (B \vee C) \equiv p \wedge [p \vee E]$

$\equiv p \qquad M \bullet\!\!-\!\!-\!\!-\, p \,-\!\!-\!\!-\!\!\bullet N$

Hallar el circuito más simple equivalente *a*:



***Solución*:**

Por bloques

i) $A \wedge B$

ii) Donde: $A : (q \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p) \equiv q \wedge \sim p$

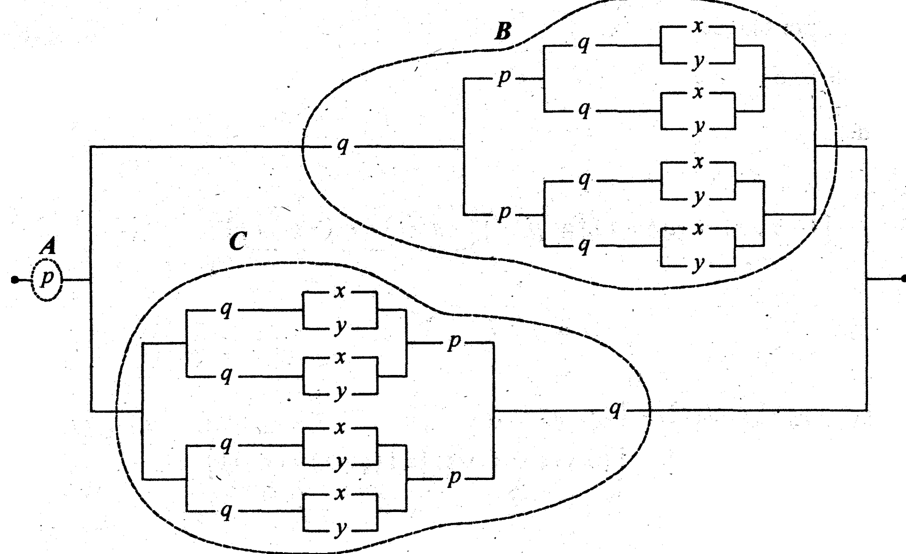
$B : \sim q \vee q \equiv T$

iii) Remplazar en *i*)

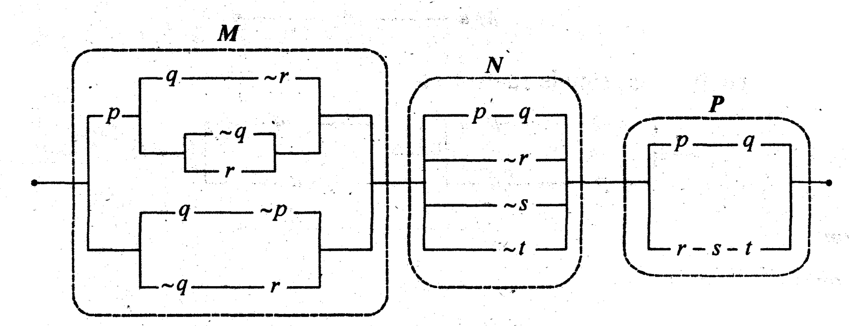
$$A \wedge B \equiv (q \wedge \sim p) \wedge T \equiv q \wedge \sim p$$

$$\bullet\!-\!-\, q \,-\!-\, \sim p \,-\!-\!\bullet$$

Simplificar al máximo el siguiente circuito:



Sabiendo que la proposición $(x \vee y)$ es equivalente al circuito:



***Solución*:**

1) Resolver y simplificar el primer circuito por bloques:

i) $A \wedge (B \vee C)$

ii) Donde:

A: p

$$B: q \wedge \left\{ \left\{ p \wedge \Big[\overbrace{(q \wedge (x \vee y)) \vee (q \wedge (x \vee y))}^{\mu} \Big] \right\} \vee \left\{ p \wedge \Big[\overbrace{(q \wedge (x \vee y)) \vee (q \wedge (x \vee y))}^{\mu} \Big] \right\} \right\} \equiv$$

$$\equiv q\wedge\left\{ p\wedge\left[\overbrace{\overbrace{(q\wedge(x\vee y))}^{z}\vee\overbrace{(q\wedge(x\vee y))}^{z}}^{\mu}\right]\right\}$$

$$\equiv q\wedge\left\{ p\wedge\left[\overbrace{(q\wedge(x\vee y))}^{z}\right]\right\}\equiv(p\wedge q)\wedge(x\vee y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1*)$$

C: es igual a B.

2) Al reemplazar en *i*) $A\wedge(B\vee C)\equiv A\wedge(B\vee B)\equiv A\wedge B\equiv p\wedge[\,(p\wedge q)\wedge(x\vee y)\,]$

$$\equiv(p\wedge q)\wedge(x\vee y)\ldots\ldots(2*)$$

3) Resolviendo y simplificando el segundo circuito:

i) $x\vee y\equiv M\wedge N\wedge P$

ii) Donde:

M: $\{p\wedge[(q\wedge\sim r)\vee(\sim q\vee r)]\}\vee\{(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\wedge r)\}$

$$\equiv\{p\wedge[\underbrace{(q\wedge\sim r)\vee\sim(q\wedge\sim r)}_{T}]\}\vee\{(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\wedge r)\}$$

$$\equiv\underbrace{(p\wedge T)}\vee[(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\wedge r)]$$

$$\equiv\quad P\quad\vee[(q\wedge\sim p)\vee(\sim q\wedge r)]$$

$$\equiv\underbrace{[\,p\vee(q\wedge\sim p)\,]}\vee(\sim q\wedge r)$$

$$\equiv\quad[p\vee q]\quad\vee(\sim q\wedge r)\equiv p\vee[\,q\vee(\sim q\wedge r)\,]\equiv p\vee q\vee r$$

N: $[\,(p\wedge q)\vee(\sim r\vee\sim s\vee\sim t)\,]\equiv[\,(p\wedge q)\vee\sim(r\wedge s\wedge t)\,]$

P: $(p\wedge q)\wedge(r\wedge s\wedge t)$

iii) Reemplazar en *i*)

$X\vee Y\equiv M\wedge N\wedge P$

$$\equiv(p\vee q\vee r)\wedge[\underbrace{(p\wedge q)}_{m}\vee\sim\underbrace{(r\wedge s\wedge t)}_{u}]\wedge[\underbrace{(p\wedge q)}_{m}\wedge\underbrace{(r\wedge s\wedge t)}_{u}]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (m \vee \sim u) \wedge (m \wedge u)$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \left[\left(m \wedge (m \wedge u) \right) \vee \underbrace{\left(\sim u \wedge (m \wedge u) \right)}_{F} \right]$$

falso, porque: $\sim \mu \wedge \mu \equiv F$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \left[\underbrace{(m \wedge u) \vee F}_{m \wedge u} \right]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (m \wedge u)$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \left[\overbrace{(p \wedge q)}^{m} \wedge \overbrace{(r \wedge s \wedge t)}^{u} \right]$$

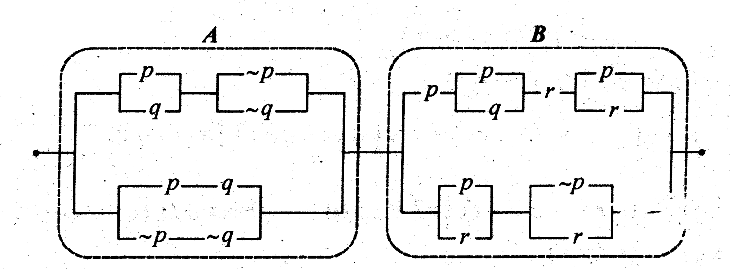
$$\equiv \underbrace{\left[(p \vee q \vee r) \wedge (p \wedge q) \right]} \wedge (r \wedge s \wedge t)$$

$$\equiv \quad (p \wedge q) \wedge (r \wedge s \wedge t) \equiv p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \text{ .... } (3*)$$

4) Remplazar (3*) en (2*).

$$(p \wedge q) \wedge (x \vee y) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t)$$
$$\equiv p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

● Simplificar el siguiente circuito lógico:



***Solución*:**

1) Resolver por bloques

i) $A \wedge B$

ii) Donde:

$$A:\ [(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)]\vee[(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]\equiv$$

$$\equiv[\underbrace{(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)}_{p\,\Delta\,q}]\vee[(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)]$$

$$\equiv\quad p\,\Delta\,q\quad\vee\sim[\underbrace{(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)}_{p\,\Delta\,q}]$$

$$\equiv\underbrace{(p\,\Delta\,q)\vee\sim(p\,\Delta\,q)}_{T}$$

$$\boxed{A\equiv T}$$

$$B:\ [p\wedge(p\vee q)\wedge r\wedge(p\vee r)]\vee[(p\vee r)\wedge(\sim p\vee r)]$$

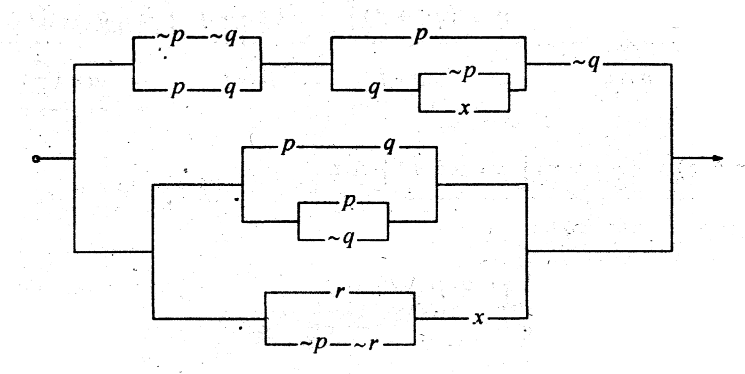
$$\equiv[\underbrace{(p\wedge(p\vee q))}_{p}\wedge\underbrace{(r\wedge(p\vee r))}_{r}]\vee\underbrace{[\underbrace{(p\wedge\sim p)}_{F}\vee r]}_{r}$$

$$\equiv[p\wedge r]\vee r$$

$$B\equiv r$$

2) Sustituir en *i*) $\quad A\wedge B\equiv T\wedge r\equiv r$

⑧ Hallar la proposición x de manera que sea una tautología el circuito simplificado siguiente:



GRUPO 2: SIMPLIFICACIÓN DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

Aplicando equivalencias lógicas, simplificar lo más posibles las siguientes proposiciones:

a) $\{[p \to (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \to r)]\} \vee \{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$

b) $\{[((\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)) \vee (p \to r)] \wedge \sim (p \leftrightarrow q)\} \Delta [q \wedge ((t \wedge s) \to q)]$

Solución:

a) $\{\underbrace{[p \to (q \wedge \sim r)]}_{\sim p \vee (q \wedge \sim r)} \wedge [p \wedge \underbrace{(q \to r)}_{\sim q \vee r}]\} \vee \{[p \wedge q \wedge (p \vee q)] \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$

$\equiv \{\sim [p \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\} \vee \{[\underbrace{(p \wedge q) \wedge (p \vee q)}] \vee [\underbrace{(r \wedge (\sim r \vee q))}_{r \wedge q} \wedge p]\}$

$\equiv \{\sim [p \wedge \sim (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge \sim (q \wedge \sim r)]\} \vee \{[\ p \wedge q\ ] \vee [(r \wedge q) \wedge p]\}$

$[\underbrace{p \wedge q}_{s}] \vee [\underbrace{(p \wedge q)}_{s} \wedge r]$

$\underbrace{\sim t \wedge t}_{F}$

$\underbrace{s \vee [s \wedge r]}_{s}$

$\equiv F \vee s$

$\equiv s \equiv \boxed{p \wedge q}$

b) $\{[\underbrace{((\sim q \wedge p) \vee (\sim p \wedge q))}_{p \Delta q} \vee \underbrace{(p \to r)}_{\sim p \vee r}] \wedge \underbrace{\sim (p \leftrightarrow q)}_{p \Delta q}\} \Delta [q \wedge ((t \wedge s) \to q)]$

$\underbrace{q \wedge (\sim (t \wedge s) \vee q)}_{q}$

$\equiv \{\underbrace{[(p \Delta q) \vee (\sim p \vee r)] \wedge (p \Delta q)}_{(p \Delta q)}\} \Delta q$

$\equiv (p \Delta q) \Delta q \equiv p \Delta \underbrace{(q \Delta q)}_{F} \equiv p \Delta F \equiv p$

Sea s una proposición que corresponde a la siguiente tabla: y r la proposición más simplificada, equivalente a $[(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$

p q	s
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

¿Cuál es el circuito más sencillo, equivalente al que resulta de conectar en paralelo los circuitos correspondientes a "$\sim r$" y a "s"?

Solución:

(1) La tabla de verdad a s es: $s \equiv p \Delta q$

(2)
$$
\begin{aligned}
r &\equiv [(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q \\
&\equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q \\
&\equiv \{[(\sim p \vee q) \to \sim q] \wedge [\sim q \to (\sim p \vee q)]\} \wedge \sim q \\
&\equiv \{[\sim (\sim p \vee q) \vee \sim q] \wedge [q \vee (\sim p \vee q)]\} \wedge \sim q \\
&\equiv \{\underbrace{[(p \wedge \sim q) \vee \sim q]}_{\sim q} \wedge \underbrace{[q \vee (\sim p \vee q)]}_{q \vee \sim p}\} \wedge \sim q \\
&\equiv [\underline{\underline{\sim q}} \wedge (q \vee \sim p)] \wedge \underline{\underline{\sim q}} \\
&\equiv \underbrace{(\sim q \wedge \sim q)}_{\sim q} \wedge (q \vee \sim p) \\
&\equiv \sim q \wedge (q \vee \sim p) \\
&\equiv \underbrace{(\sim q \wedge q)}_{F} \vee (\sim q \wedge \sim p) \\
&\equiv \sim q \wedge \sim p \equiv \sim (p \vee q)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{r \equiv \sim (p \vee q)}$$

(3) Se pide el circuito más sencillo equivalente al que resulta en conectar en paralelo a "$\sim r$" y "s".

Es decir
$$\sim r \vee s \equiv \underbrace{\sim [\sim (p \vee q)]}_{p \vee q} \vee \underbrace{s}_{p \Delta q}$$
$$\equiv p \vee q \qquad p \Delta q$$

$$\equiv \underbrace{(p \vee q) \vee (p \,\Delta\, q)} \equiv (p \vee q) \vee [(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)]$$

$$\equiv \quad p \vee q$$

(Circuito: p y q en paralelo.)

a) Utilizando leyes lógicas, simplificar la siguiente proposición compuesta:

$$A \equiv [\sim (p \to q) \to \sim (q \to p)] \wedge [p \vee q]$$

b) Partiendo de la proposición compuesta:

$\{ p \to [p \wedge \sim (q \vee r)] \}$, llegar a la proposición:

$\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$ utilizando equivalencias lógicas.

Solución:

a)
$$A \equiv [\underbrace{\sim (p \to q)} \to \underbrace{\sim (q \to p)}] \wedge [p \vee q]$$

$$A \equiv [(p \wedge \sim q) \to (q \wedge \sim p)] \wedge [p \vee q]$$

$$\equiv [\underbrace{\sim (p \wedge \sim q)} \vee (q \wedge \sim p)] \wedge [p \vee q]$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim p)] \wedge [p \vee q]$$

$$\equiv [(q \vee \sim p) \vee (q \wedge \sim p)] \wedge [p \vee q] \equiv (\underline{q \vee} \sim p) \wedge (\underline{q \vee} p)$$

$$\equiv \underline{q \vee} \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \equiv q$$

b)
$$\{ p \to [p \wedge \sim (q \vee r)] \} \equiv$$

$$\equiv \underline{\sim p} \vee [p \wedge \sim (q \vee r)]$$

$$\equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \wedge [\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)]$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$$

Sea s una proposición que corresponde a la siguiente tabla: y r la proposición más sencilla equivalente a

$$[(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q.$$

¿Cuál es el circuito más sencillo, equivalente al que resulta de conectar en paralelo los circuitos correspondientes a $\sim r$ y a s?

p q	t
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

***Solución*:**

1) Se pide hallar el circuito que corresponde a $(\sim r \vee s)$.

2) Debo simplificar:

$$r \equiv [(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

$$r \equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

Donde:

$$\sim r \equiv \sim\{[(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q\}$$

$$\equiv \underbrace{\sim[(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q]} \vee q$$

$$\equiv [(\sim p \vee q)\, \Delta \sim q] \vee q$$

$$\equiv \{[(\sim p \vee q) \vee \sim q] \wedge \sim[(\sim p \vee q) \wedge \sim q]\} \vee q$$

$$\equiv \{\underbrace{[\sim p \vee \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}]} \wedge \underbrace{\sim[(\sim p \wedge \sim q)]}\} \vee q$$

$$\equiv \{\quad T \quad \wedge \quad p \vee q \quad\} \vee q$$

$$\equiv (p \vee q) \vee q$$

$$\sim r \equiv p \vee q$$

3) También se puede desarrollar del siguiente modo:

$$r \equiv [(p \to q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q] \wedge \sim q$$

$$\equiv \{ [\sim(\sim p \vee q) \vee \sim q] \wedge [q \vee (\sim p \vee q)] \} \wedge \sim q$$

$$\equiv \{ [(p \wedge \sim q) \vee \sim q] \wedge [(\sim p \vee q)] \} \wedge \sim q$$

$$\equiv \{ [\underline{(p \wedge \sim q)} \vee \sim q] \wedge \sim \underline{(p \wedge \sim q)} \} \wedge \sim q$$

$$\equiv [\underline{\sim q} \wedge \sim (p \wedge \sim q)] \wedge \underline{\sim q}$$

$$\equiv \sim q \wedge \sim (p \wedge \sim q)$$

$$\equiv \sim [q \vee (p \wedge \sim q)]$$

$$\equiv \sim [(q \vee p) \wedge \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}] \equiv \sim (p \vee q)$$

Luego: $\sim r \equiv p \vee q$

4) Según la tabla por s, corresponde la disyunción exclusiva $p \, \Delta \, q \equiv s$.

5) Reemplazar en 1)

$$\sim r \vee s \equiv (p \vee q) \vee (p \, \Delta \, q)$$

$$\equiv (p \vee q) \vee [(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)]$$

$$\equiv p \vee q$$

p

q

5 Sea la función $f : \{ p / p \text{ es proposición} \} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por:

$$f(p) = \begin{cases} 1 \ , & \text{si } p \text{ es verdadera} \\ 0 \ , & \text{si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

¿Es verdad que $f(p \rightarrow q) = 1 - f(q) \, f(\sim p)$?

***Solución*:**

Hagamos una tabla:

p	q	$p \to q$	$f(p \to q)$	q	$f(q)$	$\sim p$	$f(\sim p)$	$1 - f(q)\, f(\sim p)$
V	V	V	1	V	1	F	1	$1-(1)(1)=0$
V	F	Ⓕ	0	F	0	F	1	$1-(0)(1)=1$
F	V	V	1	V	1	V	0	$1-(1)(0)=1$
F	F	V	1	F	0	V	0	$1-(0)(0)=1$

No son iguales

Es falso que: $f(p \to q) = 1 - f(q)\, f(\sim p)$

6 **Para una proposición cualquiera p se define:**

$$\psi(p) = \begin{cases} 1 \text{ , si } p \text{ es verdadero} \\ 0 \text{ , si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

si $\psi(x) = 1$, $x \equiv (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \leftrightarrow w)$

$\psi(y) = 0$, $y \equiv w \vee \sim s$

Hallar:

a) $\psi\left[(s \leftrightarrow \sim w) \leftrightarrow (\sim p \vee r) \right]$

b) $\psi\left[\sim(\sim r \to \sim p) \to (t \to (w \wedge \sim p)) \right]$

Solución:

1) Debemos hallar el valor de verdad de s, w, p, r; sabiendo dos cosas:

i) si $\psi(x) = 1$, entonces x es Ⓥ

ii) si $\psi(y) = 0$, entonces y es [F]

2) En $y \equiv \underset{F}{w} \vee \underset{F}{\sim s}$ (F), luego $\begin{cases} w \text{ es F} \\ \sim s \text{ es F, entonces es } s \text{ es V} \end{cases}$

Es decir: $\boxed{\begin{matrix} w \text{ es F} \\ s \text{ es V} \end{matrix}}$ $\sim w$ es V

3) En $x = (p \wedge \sim s) \leftrightarrow (\underset{V}{s} \leftrightarrow \underset{F}{w})$
(F) (F)

Nota: en $p \leftrightarrow q$;
si q es F , también p es F.
si q es V , también p es V.

Así, hemos hallado que : $\boxed{p \wedge \sim r \text{ es F}}$.

Luego : $\underbrace{\sim (p \wedge \sim r)}_{\sim p \vee r}$ será V

4) a) $\psi\,[\overbrace{(\underset{V}{s} \leftrightarrow \underset{V}{\sim w}) \leftrightarrow \underbrace{(\sim p \vee r)}_{V}}^{m}]$, luego $\boxed{\psi\,(m) = 1}$, porque m es V.
(V) ↔ V → ⓥ

b) $\psi\,[\underbrace{\sim (\sim r \to \sim p)}_{\sim (r \vee \sim p)} \to (t \to (w \wedge \sim p))]$

$\psi\,[\overbrace{\underbrace{(p \wedge \sim r)}_{F} \to (t \to \underbrace{(w \wedge \sim p)}_{F})}^{n}]$

Si el antecedente es *F*, entonces la implicación es *V*, cualquiera que fuese el valor de verdad del consecuente, por tanto $\psi\,(n) = 1$.

Otra forma de resolver es como sigue:

5) Analizar el valor de verdad:

$t \rightarrow (w \wedge \sim p)$, sabiendo que w es F, no se sabe el valor de verdad de p.
F

Optemos que p sea F o p sea V .

i) Si p es F, entonces: $t \rightarrow (w \wedge \sim p)$, $\sim p$ es V

$$\underbrace{F \quad V}_{F}$$

ii) Si p es V, entonces: $t \rightarrow (w \wedge \sim p)$, $\sim p$ es F

$$\underbrace{F \quad F}_{F}$$

Hemos obtenido que: $(w \wedge \sim p)$ es F para cualquier valor de p .

iii) Ahora, hallemos el valor de verdad de $t \rightarrow \underbrace{(w \wedge \sim p)}_{F}$

Como no se sabe el valor de verdad de t, podemos suponer de dos valores:

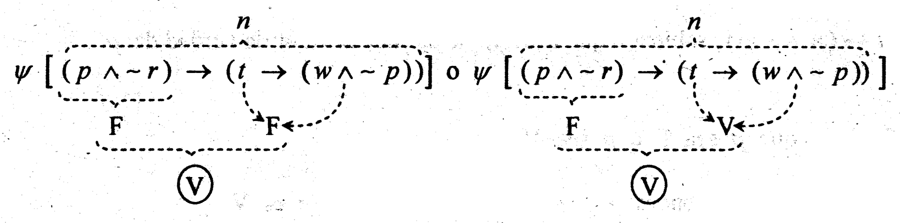
- si t es V, entonces: $t \rightarrow \underbrace{(w \wedge \sim p)}$

$$\underbrace{V \qquad F}_{\text{(F)}}$$

- Si t es F, entonces: $t \rightarrow (w \wedge \sim p)$

$$\underbrace{F \qquad F}_{\text{(V)}}$$

6) Volver a 4 b) :

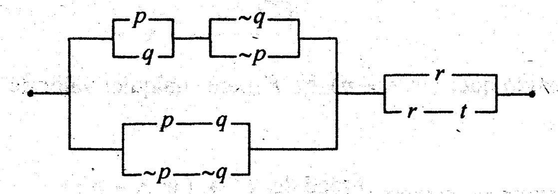


En ambos casos: $\boxed{\psi(n)=1}$, porque n es V.

Sea X la proposición más simplificada de la proposición compuesta:

$[(p*p)*q]\;*\;[(p*p)*q]$, donde: $\sim[\sim p\rightarrow q]=p*q$

Sea Y la proposición equivalente más simplificadas del circuito lógico:



Sea Z la proposición más simplificada de la proposición compuesta.

$[p\wedge(q\wedge r)]\vee[(p\wedge\sim q)\wedge r]\vee[\sim q\wedge(\sim p\wedge r)]$

Hallar el circuito lógico más simple equivalente a $X\rightarrow(Y\vee Z)$.

Solución:

1) Se tiene: $p*q\equiv\sim[\sim p\rightarrow q]$

$\equiv\sim[p\vee q]$

2) Luego:

a) $p*p\equiv\sim\underbrace{(p\vee p)}_{p}\equiv\sim p$

b) $(p*p)*q\equiv(\sim p)*q$

$\equiv\sim[\sim p\vee q]\equiv p\wedge\sim q$

c) Hagamos $p\wedge\sim q\equiv m$

Luego $X\equiv[\underbrace{(p*p)*q}_{m}]*[\underbrace{(p*p)*q}_{m}]$

$\equiv m*m$

$\equiv\sim(m\vee m)$

$\equiv\sim m$

$\equiv\sim(p\wedge\sim q)$

$\boxed{X\equiv\sim p\vee q}$

3) El circuito que corresponde a Y es:

$$Y \equiv \{[(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)] \vee [\underbrace{(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)}]\} \wedge \{\underbrace{r\vee(r\wedge t)}_{r}\}$$

$$\underbrace{(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)}_{p\,\Delta\,q} \qquad\qquad (p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$$

$$\sim[\underbrace{\sim(p\wedge q)\wedge(p\vee q)}_{p\,\Delta\,q}]$$

$$\equiv[\underbrace{(p\,\Delta\,q)\ \vee\sim(p\,\Delta\,q)}_{T}]\wedge r \quad \equiv T\wedge r\equiv r$$

$$\boxed{Y\equiv r}$$

4) $Z\equiv[p\wedge(q\wedge r)]\vee[(p\wedge\sim q)\wedge r]\vee[\sim q\wedge(\sim p\wedge r)]$

$$\equiv[\underline{\underline{r}}\wedge(p\wedge q)]\vee[\underline{\underline{r}}\wedge(p\wedge\sim q)]\vee[\underline{\underline{r}}\wedge\sim(p\vee q)] \quad \text{“factorizar } r\text{”}$$

$$\equiv\underline{\underline{r}}\wedge\{[(\underline{\underline{\underline{p}}}\wedge q)\vee(\underline{\underline{\underline{p}}}\wedge\sim q)]\vee\sim(p\vee q)\}$$

$$\equiv r\wedge\{[\underbrace{p\wedge(\underbrace{q\vee\sim q}_{T})}_{p}]\vee\sim(p\vee q)\}$$

$$\equiv r\wedge\{p\vee\sim(p\vee q)\}$$

$$\equiv r\wedge\{p\vee(\sim p\wedge\sim q)\}$$

$$\equiv r\wedge\{(\underbrace{p\vee\sim p}_{T})\wedge(p\vee\sim q)\}$$

$$\boxed{Z\equiv r\wedge(p\vee\sim q)}$$

5) Luego: $X\to(Y\vee Z)$

$$\equiv\sim X\ \vee\ (Y\vee Z)$$

$$\equiv\sim(\sim p\vee q)\vee[\underbrace{r\vee(r\wedge(p\vee\sim q))}_{r}]$$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee r$

p — $\sim q$

r

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) Es suficiente que $p \Delta q$ sea falsa para que p y q sean equivalentes

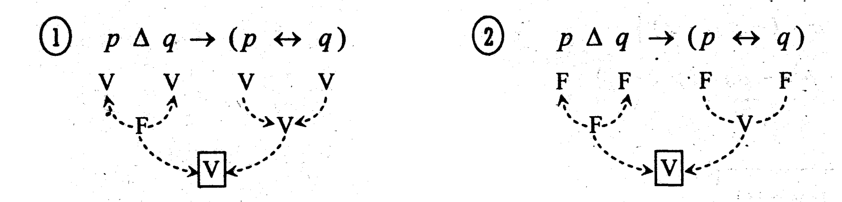
b) No es necesario que p sea verdadera y q sea falsa para que $[p \vee (q \wedge \sim p)] \vee \sim q$ sea verdadero.

Solución de a) La proposición es verdadera, porque:

si $p \Delta q$ es F, entonces
$$\begin{cases} p \quad q & \text{.........(1)} \\ \text{F} \quad \text{F} & \\ \quad \text{o} & \\ \text{V} \quad \text{V} & \text{.........(2)} \end{cases}$$

Como vemos, en (1) y en (2) los valores de verdad de p y q son los mismos, es decir son equivalentes.

Formalizando, se tiene:



Como vemos $p \Delta q$ implica $p \leftrightarrow q$, lo que equivale a confirmar que, es suficiente que $p \Delta q$ sea F para que p y q sean equivalentes.

Solución de b)

Al simplificar: $[p \vee (q \wedge \sim p)] \wedge \sim q \equiv$

$\equiv [p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q$

$\equiv [\underbrace{(p \vee \sim p)}_{T} \wedge (p \vee q)] \vee \sim q$

$\equiv (p \vee q) \vee \sim q$

$\equiv p \vee \underbrace{(q \vee \sim q)}_{T}$

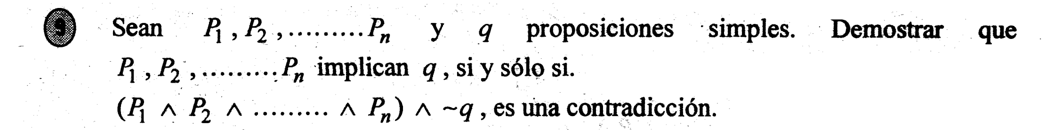
$\equiv T$

Como es TAUTOLOGÍA (verdadero), entonces p y q pueden tener cualquier valor de verdad. Luego la proposición en b) es VERDADERO.

9 Sean $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots P_n$ y q proposiciones simples. Demostrar que $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots P_n$ implican q, si y sólo si.
$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$, es una contradicción.

Solución:

Por probar que:



$$\overbrace{[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n) \rightarrow q]}^{A} \leftrightarrow \overbrace{[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q]}^{B} \text{ es una contradicción}$$

Se debe probar los dos sentidos: $A \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow A$

($\Rightarrow$) Debo probar que B es F.

1) Si $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots, P_n$ implican q, significa que la condicional

$\underbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots P_n) \rightarrow q}_{A}$ es VERDADERA.

2) La negación de A es $\sim A$, donde:

$$\sim A \equiv \sim\left[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \rightarrow q \right]$$

$$\equiv \sim\left[\sim (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \vee q \right]$$

$$\equiv \; (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$$

3) Como A es V, entonces $\sim A$ es F, es decir

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$ es F.

($\Leftarrow$)

si $\overbrace{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q}^{B}$ es F, debo probar que $P_1 , P_2 , \ldots\ldots\ldots , P_n$ implica q.

Veamos:

4) Sea $B \equiv (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q$

5) La negación de B es:

$$\sim B \equiv \sim\left[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \wedge \sim q \right]$$

$$\equiv \sim (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n) \vee q$$

$$\sim B \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n \Rightarrow q$$

6) Como B es F, entonces $\sim B$ es V.

7) Si la condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots\ldots\ldots \wedge P_n \Rightarrow q)$ es V, quiere decir que

$P_1 , P_2 , \ldots\ldots\ldots , P_n$ implica q.

11) Sean r , t, p_i , q_i $i \equiv 1 , 2 , \ldots\ldots , n$ proposiciones tales que $p_i \wedge t$ es FALSA para todo $i \equiv 1, 2 , \ldots\ldots , n$

$S \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \vee \ldots\ldots\ldots \vee P_n$ es verdadera

$r \equiv (P_1 \wedge t) \vee (P_2 \wedge t) \vee \ldots\ldots\ldots \vee (P_n \wedge t)$

$q_i \equiv P_i \vee t$ es FALSO para i par y VERDADERO para i impar.

Hallar el valor de verdad de:

$$\{(p_5 \vee t) \leftrightarrow (q_2 \wedge p_1)\} \,\Delta\, \{\sim(q_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge t)\}$$

Solución:

Sea.

$$A \equiv \{\underbrace{(p_5 \vee t)}_{\substack{q_5 \\ V}} \leftrightarrow (\underset{F}{q_2} \wedge \underset{V}{p_1})\} \,\Delta\, \{\sim(\underset{V}{q_1} \wedge \underset{F}{p_2}) \vee (\underset{V}{p_3} \wedge \underset{F}{t})\}$$

Por datos se tiene:

1) $q_i \equiv p_i \vee t$ → F , si $i =$ por ; V , si $i =$ impar

Luego: $\boxed{q_5 \equiv p_5 \vee t \text{ es } V}$ porque $i = 5$ es impar

2) q_1 es V porque $i = 1$ es impar, a su vez $\boxed{q_1 \equiv p_1 \vee t}$ es V

3) q_3 es V porque $i = 3$ es impar, a su vez $\boxed{q_3 \equiv p_3 \vee t}$ es V

4) q_2 es F porque $i = 2$ es par, a su vez $\boxed{q_2 \equiv p_2 \vee t}$ es F

5) Luego, si $p_2 \vee t$ es F, entonces $\boxed{p_2 \text{ es } F}$ y $\boxed{t \text{ es } F}$ (Por ley de la disyunción).

6) En 2) si $p_1 \vee t$ es V, siendo t FALSO, entonces $\boxed{p_1 \text{ es } V}$

7) Haciendo las evaluaciones en A:

$$\{\underbrace{(p_5 \vee t)}_{V} \leftrightarrow (\underset{F}{q_2} \wedge \underset{V}{p_1})\} \,\Delta\, \{\sim(\underset{V}{q_1} \wedge \underset{F}{p_2}) \vee (\underset{V}{q_3} \wedge \underset{F}{t})\}$$

$q_2 \wedge p_1$: F ∧ V → F; $(p_5 \vee t) \leftrightarrow (q_2 \wedge p_1)$: V ↔ F → (F)

$q_1 \wedge p_2$: V ∧ F → F; $\sim(q_1 \wedge p_2)$ → (V); $q_3 \wedge t$: V ∧ F → F; (V) ∨ F → (V)

(F) Δ (V) → $\boxed{V}$

8) CONCLUSIÓN: A es V.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones compuestas son equivalentes?

A: $(\sim p \vee q) \;\vee\; (\sim r \wedge \sim p)$ B: $p \;\Delta\; (r \rightarrow q)$

C: $\sim q \rightarrow \sim p$

***Solución*:**

1) Hagamos las combinaciones de A, B y C tomando por parejas: (A, B), (A, C) y (B, C).
2) A continuación cada pareja las unimos por el bicondicional $\leftrightarrow$.
3) Luego estudiar si las bicondicionales $A \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow C$ y $B \leftrightarrow C$ son o no TAUTOLOGÍAS.

Si $A \leftrightarrow B$ es una tautología, escribiremos $A \equiv B$ para indicar que A y B son equivalentes de lo contrario escribiremos $A \not\equiv B$ para indicar que A y B no son equivalentes.

De igual manera procedemos para $A \leftrightarrow C$ y $B \leftrightarrow C$.

Veamos:

a)

p	q	r	$[(\sim p$		$\vee$	$q)$	$\vee$	$(\sim r$	$\wedge$	$\sim p)]$	$\leftrightarrow$	$[p$	Δ	$(r \rightarrow q)]$
V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V

CONTINGENCIA

Luego $A \not\equiv B$

b)

p	q	r	$[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)]$	$\leftrightarrow$	$[\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p]$
			V	V	F	V	F
			V	V	F	V	F
			F	V	V	F	F
			F	V	V	F	F
			V	V	F	V	V
			V	V	F	V	V
			V	V	V	V	V
			V	V	V	V	V

Como es una tautología, entonces escribimos: $A \equiv C$

c)

p	q	r	$[p \,\Delta\, (r \rightarrow q)]$	$\leftrightarrow$	$[\sim q \rightarrow \sim p]$
			F	F	V
			F	F	V
			V	F	F
			F	V	F
			V	V	V
			V	V	V
			F	F	V
			V	V	V

CONTINGENCIA

Luego: $B \not\equiv C$.

Al simplificar: $A \equiv (\sim p \vee q) \;\vee\; (\sim r \wedge \sim p)$

$\equiv [(\sim p \vee q) \vee \sim r] \wedge [(\sim p \vee q) \vee \sim p]$

$\equiv [\underline{(\sim p \vee q)} \vee \sim r] \wedge [\underline{(\sim p \vee q)}]$

$\equiv \sim p \vee q$ (por absorción)

$\equiv p \rightarrow q$

Al simplificar: $C \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

$\equiv \sim(\sim q) \vee \sim p$

$\equiv q \vee \sim p$

$\equiv \sim p \vee q = p \rightarrow q$

Definimos los siguientes conectivos mediante las siguientes tablas:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Usado únicamente los conectivos definidos, simplificar:

$$\left\{\left[\overline{(\overline{\bar{A}+B})+(\bar{A}\cdot\bar{B})}\right] + \left[A\cdot\bar{B}\right]\right\}\cdot\left\{\left[\overline{(\bar{A}+B)}+(\bar{A}\cdot\bar{B})\right]+\left[\overline{A\cdot\bar{B}}\right]\right\}$$

Solución:

1) Los conectivos definidos son, respectivamente, equivalentes a la negación, a la conjunción y a la disyunción; por tanto podemos aplicar todas las propiedades que corresponden a los indicados conectivos.

2)
$$\left\{\left[\overline{\overline{(\bar{A}+B)}+(\bar{A}\cdot\bar{B})}\right]+\left[A\cdot\bar{B}\right]\right\}\cdot\left\{\left[\overline{(\bar{A}+B)}+(\bar{A}\cdot\bar{B})\right]+\left[\overline{A\cdot\bar{B}}\right]\right\}$$

$$\equiv\left\{\left[\overline{(A\cdot\bar{B})+(\bar{A}\cdot\bar{B})}\right]+(A\cdot\bar{B})\right\}\cdot\left\{\left[(A\cdot\bar{B})+(\bar{A}\cdot\bar{B})\right]+\left[\bar{A}+B\right]\right\}$$

$$\equiv\left\{\overline{\underbrace{(A+\bar{A})}_{1}\cdot\bar{B}}+(A\cdot\bar{B})\right\}\cdot\left\{\underbrace{(A+\bar{A})}_{1}\cdot\bar{B})+\left[\bar{A}+B\right]\right\}$$

$$\equiv\left\{\overline{1\cdot\bar{B}}+(A\cdot\bar{B})\right\}\cdot\left\{1\cdot\bar{B}+\bar{A}+B\right\}$$

$$\equiv\left\{\bar{\bar{B}}+(A\cdot\bar{B})\right\}\cdot\left\{\bar{B}+\bar{A}+B\right\}$$

$$\equiv\underbrace{\left\{B+(A\cdot\bar{B})\right\}}_{B+A}\cdot\underbrace{\left\{\underbrace{(\bar{B}+B)}_{1}+\bar{A}\right\}}_{1}$$

$$\equiv B+A$$

$$\equiv(B+A)\cdot 1$$

$$\equiv B+A$$

Nota:

$\bar{1}=0$	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
$\bar{0}=1$	$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$
$\bar{\bar{A}}=A$	$A+0=A$
$A\cdot A=A$	$A+1=1$
$A\cdot 0=0$	$A+\bar{A}=1$
$A\cdot 1=A$	$A\cdot(A+B)=A$
$A\cdot\bar{A}=0$	$A+(A\cdot B)=A$
	$A\cdot(\bar{A}+B)=A\cdot B$
	$A+(\bar{A}\cdot B)=A+B$

El dueño de una casa de venta de autos desea colocar en la puerta de su establecimiento un letrero con un lema que lo identifique. En principio tiene como candidatos los siguientes lemas:

- Un buen auto no es barato.
- Un auto barato no es bueno.
- Un auto barato es bueno.
- Un auto es bueno o no es barato.
- Un auto no es, bueno y barato a la vez.

Su hijo que estudia en la universidad, colabora determinando qué lemas significan lo mismo, al final le alcanza un número menor de lemas. ¿Cuáles son?

Solución:

En primer lugar, expresemos cada lema en otra forma que sea su equivalente.

Así tendremos que:

a) Un buen auto no es barato $\equiv$ si $\underbrace{\text{un auto es bueno}}_{p}$, entonces un $\underbrace{\text{auto no es barato}}_{\sim q}$; $p \rightarrow \sim q$

b) Un auto barato no es bueno $\equiv$ si $\underbrace{\text{un auto es barato}}_{q}$, entonces un $\underbrace{\text{auto no es bueno}}_{\sim p}$; $q \rightarrow \sim p$

c) Un auto barato es bueno $\equiv$ si $\underbrace{\text{un auto es barato}}_{q}$, entonces $\underbrace{\text{un auto es bueno}}_{p}$. ; $q \rightarrow p$

d) $\underbrace{\text{Un auto es bueno}}_{p}$ o $\underbrace{\text{no es barato}}_{\sim q}$ $\equiv p \vee \sim q$

e) Un auto $\underbrace{\text{no es}}_{\sim}$, $\underbrace{\text{bueno}}_{p}$ y $\underbrace{\text{barato}}_{q}$ a la vez $\equiv \sim (p \wedge q)$

Luego:

a) $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$
b) $q \rightarrow \sim p \equiv \sim q \vee \sim p$
c) $q \rightarrow p \equiv \sim q \vee p$
d) $p \vee \sim q$
e) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Conclusión:

i) Son iguales los lemas *a*, *b*, *c*.
ii) *c* , *d* son iguales.
iii) Se reduce solo a dos lemas.

14 Formalizar la siguiente proposición:

Si *A* es múltiplo de 4, es divisible por 2, pero *A* no es divisible por 2 , por tanto no es múltiplo de 4.

Solución:

p : A es múltiplo de 4
q : A es divisible por 2

$$\left.\begin{array}{l} p: \text{A es múltiplo de 4} \\ q: \text{A es divisible por 2} \end{array}\right\} \left[(p \rightarrow q) \wedge \sim q \right] \rightarrow \sim p$$

Formalizar mediante símbolos lógicos, el siguiente texto:

"Ese lapso, **corto** quizá SI se le mide por el calendario ,
q ← p ∧

es interminablemente **largo** CUANDO, como yo , se ha galopado a **través de él.**
$\sim q$ ← r

Sin embargo , ese lapso de tiempo es **corto** SI toda proposición es falsa.
∧ q ← s

Por tanto , se obtiene una contradicción.
→ t

***Solución*:**

Una manera de formalizar el texto dado, es redactando nuevamente el texto en otra que sea equivalente a la original con la diferencia que el NUEVO TEXTO sea sencillo y se haga notorio los CONECTIVOS lógicos.

Veamos:

Si se le mide por el calendario, **entonces** ese lapso de tiempo es corto **y si** se ha galopado, como yo, a través de él, **entonces** ese lapso de tiempo es largo. **Sin embargo**, si toda proposición es falsa **entonces** ese lapso tiempo de tiempo es corto

Por tanto, se obtiene una contradicción.

Donde: p : se le mide por el calendario
q : ese lapso de tiempo es corto.
r : se ha galopado, como yo, a través de él.
s : toda proposición es falsa.
t : se obtiene una contradicción.

La formalización lógica es: $\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim q)] \wedge (s \rightarrow q)\} \rightarrow t$

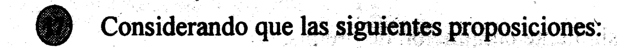
Simbolizar y analizar el valor de verdad del siguiente enunciado:

"**Si** un satélite gira alrededor de la luna, **entonces** gira también alrededor de la tierra; **y si** gira alrededor de la tierra, **también** gira alrededor del sol. **Y, si** gira alrededor del sol, **entonces** gira alrededor de la luna, **entonces** gira alrededor de la constelación de la luna."

***Solución*:**

p : Un satélite gira alrededor de la luna
q : Un satélite gira alrededor de la tierra.
r : Un satélite gira alrededor del sol.
s : Un satélite gira alrededor de la constelación de la luna.

La formalización es: $\{[(p \to q) \wedge (q \to r)] \wedge (r \to p)\} \to s$



Considerando que las siguientes proposiciones:

a) "Dos rectas de un mismo plano son paralelas si y sólo si no tienen ningún punto común";
b) "Dados una recta y un punto, por el punto sólo se puede trazar una perpendicular a la recta";
c) "Por un punto exterior a una recta, solo se puede trazar una paralela a ella"; son verdaderas.

Demostrar, que también son verdaderas:
d) "En un plano dos rectas diferentes perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí".
e) "Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra".

Traducir al lenguaje lógico:

Solución:

Demostración de la parte d)

$$\text{HIPÓTESIS} \begin{cases} L_1 \neq L_2 \ldots p_1 \\ L_1 \perp L \ \ldots p_2 \\ L_2 \perp L \ \ldots p_3 \end{cases} \qquad \text{TESIS} \left\{ L_1 \,//\, L_2 \ldots\ldots q \right.$$

Debo demostrar la validez de la INFERENCIA: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \to q$ .... (I)

Pero, la demostración directa de (I) no es posible, entonces recurrimos a la demostración por el MÉTODO DE REDUCCIÓN AL ABSURDO, que consiste en:

1° Negar las TESIS $\sim q \equiv L_1 \nparallel L_2$ ⟵ "L_1 no es paralela a L_2"
2° Introducir $\sim q$ en la CONJUNCIÓN de PREMISAS de la hipótesis de una nueva INFERENCIA (II) que es equivalente a (I).
3° llegar a negar alguna de las premisas (p_1) de (I) que será la CONCLUSIÓN (TESIS) de la nueva inferencia: $(\sim q \wedge p_2 \wedge p_3) \to \sim p_1$ .... (II).

La inferencia (II) es equivalente a la inferencia (I). Como (I) no es posible demostrar directamente, entonces demostraremos (II) que será más sencillo.

En consecuencia debo probar la validez de la inferencia $(\sim q \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow \sim p_1$.

Veamos:

1. Supongamos $\sim q \equiv L_1 \nparallel L_2$
2. Ahora tenemos como hipótesis la siguiente conjunción de premisas.

   $\sim q \ : \ L_1 \nparallel L_2$
   $p_2 \ : \ L_1 \perp L$
   $p_3 \ : \ L_2 \perp L$

3. Si $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow L_1 \wedge L_2$ se intersectan en un punto $I\!P$, es decir $L_1 \cap L_2 = \{ I\!P \}$
   (es la negación de la proposición a)).
4. Por $I\!P$ tracemos una recta L que sea perpendicular a L_1, es decir, $L_1 \perp L$ en $I\!P$.
5. Por la hipótesis P_3 se tiene $L_2 \perp L$ en $I\!P$.
6. Luego: Si $L_1 \perp L$ en $I\!P \wedge L_2 \perp L$ en $I\!P$ entonces $\underbrace{L_1 = L_2}_{\sim p_1}$, esto se justifica por la proposición b)
7. Según la hipótesis original se tiene $p_1 : L_1 \neq L_2$
   y según el paso 6 hemos probado $\sim p_1 : L_1 = L_2$
   lo cual es una contradicción.

En consecuencia es verdadero la inferencia $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$ porque hemos demostrado que (II) es verdadero.

Demostración de e)

$L_1 \, // \, L_2$ .... p_1
$L \neq L_1$ .... p_2
L corta a L_1 ...... p_3

TESIS L corta a L_2 .... q

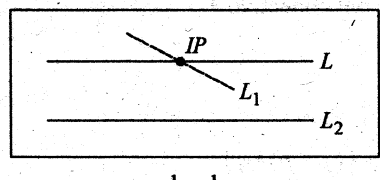
Debo demostrar: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow q$ .... (I)

Como la demostración de la validez de la inferencia (I) no es directa recurrimos a la demostración por el método de REDUCCIÓN AL ABSURDO, en este caso debemos probar la INFERENCIA: $(\sim q \wedge p_1 \wedge p_3) \rightarrow \sim p_2$ .... (II)

Veamos:

1. Supongamos $\sim q \equiv L$ no corta a L_2
2. Si L no corta a L_2 $\Rightarrow$ $L /\!/ L_2 \equiv \sim q$
3. Ahora la HIPÓTESIS es $\begin{cases} P_1 : & L_1 /\!/ L_2 \\ \sim q : & L /\!/ L_2 \\ p_3 : & L \text{ corta a } L_1 \end{cases}$ TESIS $\{ \sim p_2 : L = L_1$
4. Según p_3 : L corta a L_1 en $I\!P$ ($I\!P$ punto exterior a L_2)
5. Según c) : por $I\!P$ se traza una PARALELA a L_2.
6. Dicha paralela es L según $\sim q$. Es decir $L /\!/ L_2$.
7. Según p_1 : $L_1 /\!/ L_2 \wedge I\!P \in L_1$ según 4.
8. Si $L /\!/ L_2 \wedge L_1 /\!/ L_2$, $I\!P \in L_1 \Rightarrow L = L_1$ .... según c)

   Por lo tanto es verdadero II , lo cual implica que (I) es verdadero.



lqqd

18 Sean p , q dos proposiciones cualesquiera. Se define el conectivo "*" en la forma siguiente:

$$p * q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

Expresar sólo en términos del conectivo "*" cada una de las siguientes proposiciones:

a) $\sim p \vee q$

b) $p \leftrightarrow \sim q$

c) Simplificar $[(p*q)*q] * [(p*p)*\sim q]$

Solución:

De la definición dada: $p * q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
$\equiv \sim (p \vee q)$

Se deducen:

① $p * p \equiv \sim (p \vee p)$
$\equiv \sim p$

② $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
$\equiv \sim [(\sim p) * q]$
$\equiv [(\sim p) * q] * [(\sim p) * q]$
$\equiv [(p * p) * q] * [(p * p) * q]$

③ $p \wedge q \equiv \sim [(\sim p) \vee (\sim q)]$
$\equiv \sim p * \sim q$
$\equiv (p * p) * (q * q)$

④ $p \vee q \equiv \sim [\sim (p \vee q)]$
$\equiv \sim [p * q]$
$\equiv (p * q) * (p * q)$

Con el conectivo "*" hemos construido un álgebra para: la negación, la condicional, la conjunción y la disyunción. Esta álgebra será suficiente para expresar cualquier proposición compuesta en términos del conectivo *.

Luego:

a) $\sim p \vee q \equiv p \rightarrow q$
$\equiv [(p * p) * q] * [(p * p) * q]$

b) $p \leftrightarrow \sim q \equiv [p \rightarrow \sim q] \wedge [\sim q \rightarrow p]$
$\equiv [\sim p \vee \sim q] \wedge [q \vee p]$
$\equiv [\sim p \vee \sim q] \wedge [p \vee q]$
$\equiv \sim [p \wedge q] \wedge [p \vee q]$
$\equiv \sim [\underbrace{(p \wedge q)}_{m} \vee \underbrace{\sim (p \vee q)}_{n}]$
$\equiv \sim [m \vee n]$
$\equiv m * n$
$\equiv [(p * p) * (q * q)] * [p * q]$

Donde: $m \equiv (p \wedge q)$
$\equiv (p * p) * (q * q)$

$n \equiv \sim (p \vee q)$
$\equiv p * q$

Sean las proposiciones p, q, r, s tales que las siguientes proposiciones compuestas:

$a \ : \quad p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$

$b \ : \quad \sim p \, \Delta \, q$

son siempre verdaderas. Determinar el valor de verdad de:

$c \ : \quad \sim r \wedge (p \vee s) \rightarrow q \vee s$

Solución:

Se tiene:

a) a_1) $p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$ donde p es V, $\sim(q \wedge r)$ es V, $(q \wedge r)$ es F; resultado (V)

q r	$q \wedge r$
V V	
V F	F
F V	F
F F	F

b$_1$) $\sim p \, \Delta \, r$; $\sim p$ es F, r es V; resultado (V); se deduce $\begin{cases} r \text{ es V} \\ p \text{ es V} \end{cases}$

o

a_2) $p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$ donde p es F, $\sim(q \wedge r)$ es F, $(q \wedge r)$ es V; resultado (V)

q r	$q \wedge r$
V V	V

o

b$_2$) $\sim p \, \Delta \, r$; $\sim p$ es V, r es F; resultado (V); se deduce $\begin{cases} r \text{ es F} \\ p \text{ es F} \end{cases}$

De a$_1$) y b$_1$) deducimos: $\begin{cases} p \text{ es V} \\ r \text{ es V} \\ q \text{ es F} \end{cases}$ .... (α)

De a$_2$) y b$_2$) deducimos: $\left.\begin{matrix} r \text{ es V} \\ r \text{ es F} \end{matrix}\right\}$ lo cual es una contradicción

Utilizando (α) que es la única alternativa, ya podemos determinar el valor de verdad de c)

$c \ : \quad \sim r \wedge (p \vee s) \rightarrow q \vee s$, donde s puede ser $\begin{cases} V \\ \text{o} \\ F \end{cases}$

$\sim r$: F, p: V, q: F

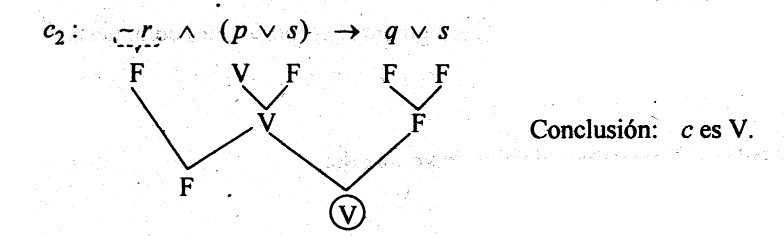
$c_1: \quad \sim r \wedge (p \vee s) \rightarrow q \vee s$

F ∧ (V ∨ V) → F ∨ V

F ∧ V → V

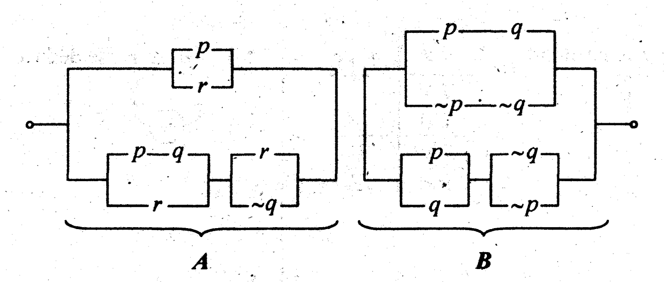
V → V

(V)



Conclusión: c es V.

21. Diseñar el circuito lógico mas simple equivalente al siguiente circuito:



Solución:

1. $A \wedge B$, donde:

2. $A \equiv \{p \vee r\} \vee \left\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge [r \vee \sim q]\right\} \equiv (p \vee r) \vee r \equiv p \vee r$

$$r \vee [(p \wedge q) \wedge \sim q]$$
$$p \wedge \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}$$
$$\underbrace{\qquad F \qquad}_{F}$$
$$\underbrace{\qquad F \qquad}_{r}$$

3. $B \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)]$

$$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \qquad \underbrace{(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)}_{p \,\Delta\, q}$$
$$\sim \underbrace{[\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q)]}_{p \,\Delta\, q}$$
$$\equiv \sim (p \,\Delta\, q) \vee (p \,\Delta\, q) \equiv T \qquad T: \text{tautología}$$

4. Luego: $A \wedge B \equiv (p \vee r) \wedge T \equiv p \vee r$ (circuito: p en paralelo con r).

Simbolizar y analizar el valor de verdad del siguiente enunciado:
"**Si** un porvenir brillante me espera, **entonces** recibiré una gran herencia **o** estudiaré mucho. **Pero no** recibiré una gran herencia. **En consecuencia**, **si no** estudiaré mucho, **entonces no** me espera un porvenir brillante **o** me es indiferente triunfar en la vida.

***Solución*:**

p : un porvenir brillante me espera.
q : recibiré una gran herencia.
r : estudiaré mucho.
t : me es indiferente triunfar en la vida.

$$\{[p \to (q \vee r)] \wedge \sim q\} \to \{\sim r \to (\sim p \vee t)\}.$$

"**Si** A es múltiplo de 4, es divisible por 2, **pero** A **no** es divisible por 2, **por tanto no** es múltiplo de 4".

***Solución*:**

p : A es múltiplo de 4
q : A es divisible por 2

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} \; [(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

A : **Si** a es primo **y** a **no** es mayor que 2 **entonces** a **no** es múltiplo de 2
1) **Si** a es múltiplo de 2 **entones** a **no** es primo **y no** es mayor que 2.
2) **Si** a es múltiplo de 2 **entonces** a **no** es primo **o** es mayor que 2.
3) a **no** es múltiplo de 2 **o** a **no** es primo **o** a es mayor que 2.

¿Cuáles de estas proposiciones son equivalentes a la primera?

***Solución*:**

r : a es primo
s : a es mayor que 2
t : a es múltiplo de 2

A : $(r \wedge \sim s) \to \sim t$
1) : $t \to (\sim r \wedge \sim s)$
2) : $t \to (\sim r \vee s) \equiv \sim t \vee (\sim r \vee s) \equiv \sim t \vee \sim (r \wedge \sim s) \equiv (r \wedge \sim s) \to \sim t$
3) : $\sim t \vee \sim r \vee s \equiv \sim t \vee \sim (r \wedge \sim s) \equiv (r \wedge \sim s) \to \sim t$

2) y 3) son equivalentes con A.

Dada la proposición:

"9 no es par divisible entre 3, **porque** 8 no es múltiplo de 4"

Determinar el valor de la proposición y negarla oracionalmente

***Solución*:**

(F) p : 9 es par
(V) q : 9 es divisible entre 3
(V) r : 8 es múltiplo de 4

$$\sim r \to (\sim p \wedge q)$$

F V V → V → (V)

La negación es: $\sim[\sim r \to (\sim p \wedge q)] \equiv \sim[r \vee (\sim p \wedge q)] \equiv \sim r \wedge \sim(\sim p \wedge q)$

$$\equiv \sim r \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv (\sim r \wedge p) \vee (\sim r \wedge \sim q)$$

$$\equiv (\sim r \wedge p) \vee \sim(q \vee r)$$

$$\equiv (q \vee r) \to (p \wedge \sim r)$$

"Si 9 es divisible entre 3 u 8 es múltiplo de 4, entonces 9 es par y 8 no es múltiplo de 4"

Si $p \wedge q \wedge r \equiv F$, demuestre que la proposición más simplificada de la proposición: $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \to (r \wedge \sim p)$ es la proposición $p \vee q \vee r$.

***Solución*:**

1. Simplificar la proposición:

$$[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \to (r \wedge \sim p)$$

$$\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \vee (r \wedge \sim p)$$

$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r) \vee (r \wedge \sim p)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p) \text{ ....(1*)}$$

2. Según datos: $p \wedge q \wedge r \equiv$ F   F = falso

3. Operemos en (1*):

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee [(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim p)]$

$\vee \{[(q \wedge \sim r) \vee r] \wedge [(q \wedge \sim r) \vee \sim p]\}$

$q \vee r \qquad (q \vee \sim p) \wedge (\sim r \vee \sim p)$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \{(q \vee r) \wedge [(q \vee \sim p) \wedge \sim (p \wedge r)]\}$

$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (q \vee r)] \wedge \{(p \wedge \sim q) \vee [(q \vee \sim p) \wedge \sim (p \wedge r)]\}$

$p \vee q \vee r$

$\wedge \{[(p \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim p)] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim (p \wedge r)]\}$

T

$[p \vee \sim (p \wedge r)] \wedge [\sim q \vee \sim (p \wedge r)]$

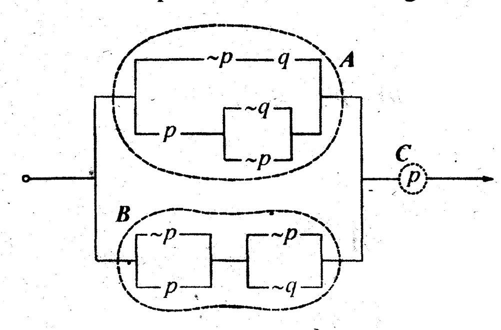
$T \qquad \sim (q \wedge p \wedge r)$

$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge \sim (p \wedge q \wedge r) \equiv p \vee q \vee r.$

F

T

26 Sea X la proposición más simplificada del circuito lógico:



y sea Y, la proposición más simplificadas de: $s \rightarrow \sim [w \Delta (\sim s \rightarrow w)]$

Si p, q, r, s, t, w son proposiciones lógicas cualesquiera tales que:

$X \leftrightarrow Y$ es verdadera y

$\sim w \rightarrow \sim s$ es falsa

Hallar los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow \sim(\sim p \vee q)$

b) $\sim(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow [t \vee (\sim w) \rightarrow w \wedge \sim p]$

Solución:

1. Sea $X \equiv (A \vee B) \wedge C$, donde:

$$A \equiv (\sim p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$$
$$\vee [(p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F}]$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{p \wedge \sim q}$$
$$\equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$$
$$\equiv p \,\Delta\, q$$

$$B \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_{T} \wedge (\sim p \vee \sim q)$$
$$\equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\equiv \sim(p \wedge q)$$

$$C \equiv p$$

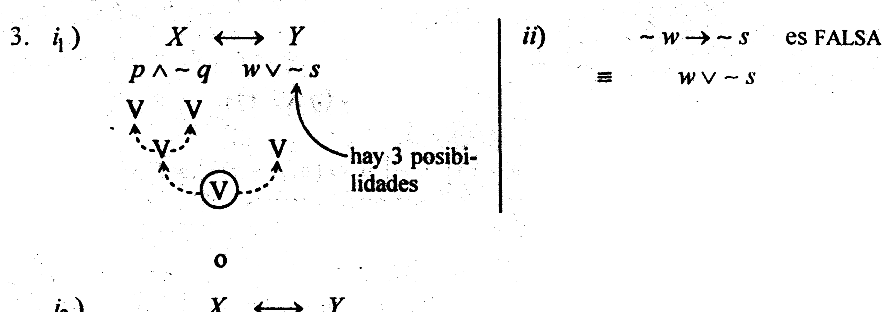
Sustituir en 1.

$$X \equiv [\underbrace{(p \,\Delta\, q) \vee \sim(p \wedge q)}] \wedge p$$
$$\equiv \quad \sim(p \wedge q)$$
$$\equiv \sim(p \wedge q) \wedge p$$
$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge p$$
$$\equiv \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F} \vee (\sim q \wedge p) \equiv p \wedge \sim q$$
$$X \equiv p \wedge \sim q$$

2. $$Y \equiv s \rightarrow \sim[w \,\Delta\, (\sim s \rightarrow w)]$$
$$\equiv \sim s \vee \sim [w \,\Delta\, (s \vee w)]$$
$$\equiv \sim \{ s \wedge \underbrace{[w \,\Delta\, (s \vee w)]} \}$$
$$\underbrace{[w \vee (s \vee w)]}_{s \vee w} \wedge \sim \underbrace{[w \wedge (s \vee w)]}_{w}$$
$$\equiv \sim \{ s \wedge [(s \vee w) \wedge \sim w] \}$$
$$[(s \wedge \sim w) \vee \underbrace{(w \wedge \sim w)}_{F}]$$

$$\equiv \sim\{s \wedge (s \wedge \sim w)\} \equiv \sim\{s \wedge \sim w\} \equiv \sim s \vee w \equiv w \vee \sim s$$

$$Y \equiv w \vee \sim s$$



o

i_2)

$X \longleftrightarrow Y$

$p \wedge \sim q$ $\quad w \vee \sim s$

F F

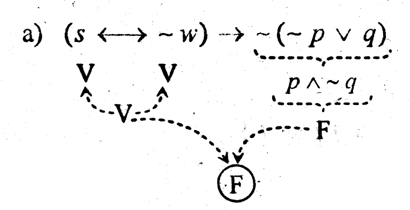
F F

V

hay 3 posibilidades

de aquí obtenemos $\begin{cases} w \text{ es F} \\ s \text{ es V} \end{cases}$

4. Se pide hallar los valores de verdad de:



b) $\sim(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow [t \vee (\sim w) \rightarrow w \wedge \sim p]$

$\sim \quad (q \vee \sim p)$

$\sim \; q \wedge p$

$p \wedge \sim q$

F $\qquad$ F

según i_2) $\qquad$ V

V

Simplificar aplicando equivalencias lógicas, la siguiente proposición:

$[p \longleftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{[p \to (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \to r)]\}$

Solución:

$\wedge \sim [\sim p \vee \sim (q \to r)]$

$\wedge \sim [\sim p \vee (q \wedge \sim r)]$

$$\equiv [p \longleftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \underbrace{\{[p \to (q \wedge \sim r)] \wedge \sim [p \to (q \wedge \sim r)]\}}_{F} \equiv F$$

Sabiendo que el valor de verdad de la proposición compuesta:

$\{\sim [(p \wedge r) \to q] \wedge [(p \vee q) \Delta s]\} \to \{(s \Delta p) \to t\}$ es siempre falso.

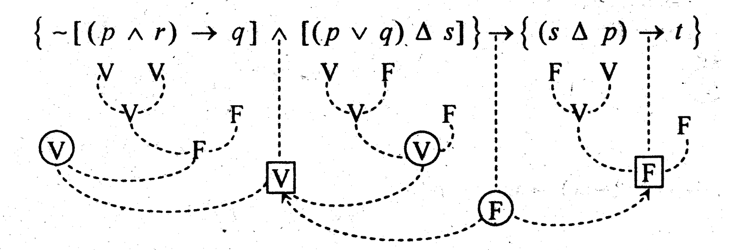
Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\{[(\sim p \Delta q) \Delta r] \to [\sim (q \to (\mu \to p))]\} \Delta (p \Delta q)$

b) $\{\sim (p \to q) \Delta [(r \wedge p) \to \sim (r \vee s)]\} \Delta t$

Solución:

1. Según datos se tiene:

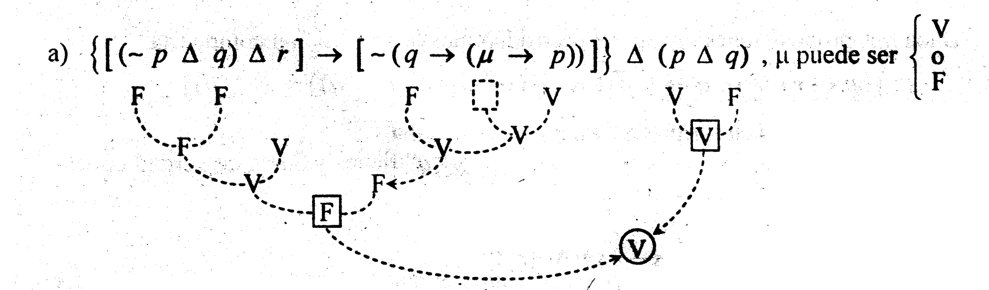


Se ha obtenido que:

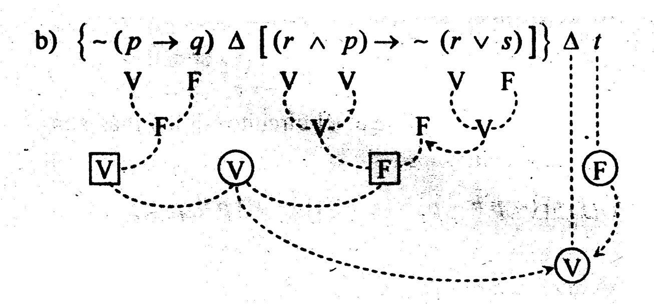
p es V
q es F
r es V
t es F
s es F

2. **Luego:**

a) $\{[(\sim p \,\Delta\, q) \,\Delta\, r] \rightarrow [\sim(q \rightarrow (\mu \rightarrow p))]\} \,\Delta\, (p \,\Delta\, q)$, μ puede ser $\begin{cases} \text{V} \\ \text{o} \\ \text{F} \end{cases}$



b) $\{\sim(p \rightarrow q) \,\Delta\, [(r \wedge p) \rightarrow \sim(r \vee s)]\} \,\Delta\, t$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Dada tres proposiciones: p, q, r, consideremos la proposición compuesta:

$$t : [(p \leftrightarrow r) \vee (\sim q \rightarrow \sim p)] \wedge [\sim((\sim p \rightarrow (\sim r \wedge q)) \vee (r \vee p)]$$

a) Simplificar t a su forma equivalente más sencilla.
b) Si "r" es falso y si las proposiciones "p" y "q" tienes valores de verdad opuestos, hallar el valor de verdad de "t".

2 Se sabe que: $t \equiv (r \longleftrightarrow s)\ \Delta \sim r$

$\mu \equiv (r \rightarrow \sim s) \rightarrow r$

Si t es falso y μ es verdadero, determinar el valor de verdad de : $[(r \longleftrightarrow u) \wedge (t\ \Delta\ s)]\ \Delta \sim t$

3 Si $p \# q \equiv [(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [r \rightarrow \sim (p \wedge q)]$, dibujar el circuito lógico más simple que representa a la siguiente proposición:

$$\{[(p \# \sim q) \# (\sim p \# q)] \# [(\sim p \# \sim p) \# (p \# q)]\} \rightarrow \{p \# q\}$$

R. $p \# q \equiv \sim (p \wedge q)$

4 Si $A : p \longleftrightarrow \sim q$

$B : [(p\ \Delta \sim q) \rightarrow r] \wedge [(p\ \Delta \sim q) \rightarrow \sim r]$

$C : \sim \{[\sim s \rightarrow (\sim s \vee r)] \rightarrow (\sim p \longleftrightarrow \sim q)\}$

¿Son A, B y C equivalentes?

R. $B : p \longleftrightarrow \sim q$

$C : p \longleftrightarrow \sim q$, A, B y C son equivalentes.

5 Usando equivalentes lógicas, simplificar:

$$[\sim (\sim p \rightarrow \sim q) \longleftrightarrow \sim (p \vee q)] \vee [p \rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r)]$$

R. T , $T \equiv$ tautología.

6 Se tiene los siguientes datos:
p es verdadero; $r \rightarrow \sim p$ es verdadero y $\sim r \rightarrow s$ es verdadero.
Hallar el valor verdad de $\sim r$ y de s.
R. $\sim r$ es V , s es V.

7 Sean p, q, r, s, t proposiciones.
Si $[(\sim p) \wedge q] \rightarrow [(r \rightarrow p) \vee t]$ es una proposición falsa, hallar el valor de verdad de: $\sim(q \vee \sim r) \vee \sim[t \rightarrow ((\sim q) \wedge p)]$.

8 Sean p, q, r, s, t proposiciones.
Si $(p \vee q) \longleftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera y $r \; \Delta \; s$ es verdadera, analizar el valor de verdad de:

$$[((\sim p) \longleftrightarrow r) \; \Delta \; (s \rightarrow q)] \wedge s$$

9 Se define el conectivo $\downarrow$ por la tabla

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

a) Expresar $p \; \Delta \; q$ en términos de $\downarrow$ y $\sim$.
b) comprobar mediante una tabla de verdad que la expresión hallada en a) es equivalente a $p \leftrightarrow \sim q$.

10 Se define el conectivo # mediante la siguiente tabla de valores

p	q	$p \# q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

a) Demostrar, usando equivalencias, que $(p \# q) \# (p \# q) \equiv (p \vee q)$
b) Expresar $p \rightarrow q$ sólo en términos del conectivo #.

11 Considerando las siguientes proposiciones:

p : La protesta refleja un síntoma de disconformidad.
q : Los empresarios son personas adineradas.
r : Las personas adineradas son extravagantes.

Traducir en el lenguaje usual, la siguiente expresión simbólica $p \rightarrow \sim (q \vee r)$

12 Estudiar si es válida o no la siguiente proposición compuesta:

"Si en la luna no hay oxígeno, entonces no hay agua ni aire.
Si no hay oxígeno ni hay agua, entonces no hay plantas. No es el caso que en la luna haya oxígeno o no haya plantas.

En consecuencia, la luna está hecha de queso."

R. $\{[\sim p \rightarrow (\sim q \wedge \sim r)] \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim s] \wedge \sim[p \vee \sim s]\} \Rightarrow t$,
$t \rightarrow F$
$p \rightarrow F$
$s \rightarrow V$
$q \rightarrow V$
$r \rightarrow F$

13 Doña Juana acompaña a sus 3 sobrinos en un paseo por Lima. Después, cada sobrino afirma.

El 1° : Fuimos al Puente de los Suspiros, pero no a la Plaza San Martín, aunque estuvimos en la Alameda de los Descalzos.

El 2° : Estuvimos en el puente de los Suspiros y en la plaza San Martín, pero no visitamos palacio de Gobierno ni llegamos a la Alameda de los Descalzos.

El 3° : No fuimos al Puente de los Suspiros, pero estuvimos en la Alameda de los Descalzos.

Sabiendo que cada sobrino miente una vez y sólo una ¿qué han visitado realmente con su tía Juana? Justificar.

14 La proposición compuesta α, construida con las proposiciones simple p, q y r es verdadera si y sólo si p y q son verdaderas y r es falsa. Analizar si es verdad que tal proposición α es equivalente a la siguiente:
"p es suficiente para q, pero r no es necesario si p; sin embargo q es condición necesaria o suficiente si r".

15 Un juez interroga a tres personas: A, B y C, sospechosas de un delito. Se sabe que una de ellas es culpable, pero en sus declaraciones, cada una hace dos declaraciones, como sigue:

A : Yo y B somos inocentes.
B : A es inocente y C es culpable.
C : Yo soy inocente y A es culpable.

El Juez se entera que los sospechosos se han puesto de acuerdo para que uno de ellos diga dos verdades, otros dos mentiras y el otro una verdad y una mentira.

En base a esta información ¿es posible determinar quién es el culpable?. En tal caso ¿Cuál es?. Explicar.

16 Un comité de tres personas desea emplear un circuito eléctrico para registrar votaciones mayoritarias simples y secretas. Construya un circuito que controle tales votaciones con solo cinco interruptores, de modo que cada miembro del comité pueda accionar (cerrar) el interruptor asignado para decir "SI" con su voto o no accionar (mantenerlo abierto) el interruptor asignado para decir "NO" con su voto, y que se encienda una señal si la mayoría de los miembros del comité vota afirmativamente. (no se admiten abstenciones)

17 Para una proposición cualquiera p se define:

$$V(p)=\begin{cases} 1 \quad , & \text{si } p \text{ es verdadero} \\ 0 \quad , & \text{si } p \text{ es falso.} \end{cases}$$

A partir de las tablas de verdad, mostrar que:

a) $V(\sim p) = 1 - V(p)$

b) $V(p \vee q) \equiv V(p) + V(q) - V(p) \cdot V(q)$.

A continuación y sólo utilizando a) y b) probar que:

c) $V(p \wedge q) = V(p) \cdot V(q)$.

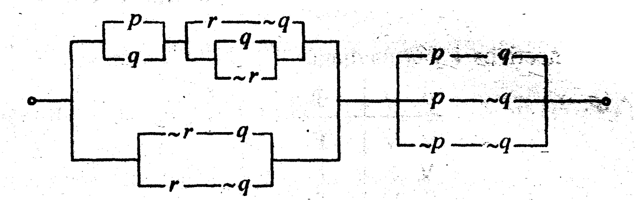
Finalmente deducir una fórmula aritmética para:

d) $V(p \Delta q \Delta r)$ en función de $V(p)$, $V(q)$ y $V(r)$.

e) $V(\sim (p \rightarrow q))$ en función de $V(\sim p)$ y $V(q)$

R : e) $V(\sim (p \rightarrow q)) = (1 - V(\sim p))\ (1 - V(q))$.

18 Sea X la proposición más simplificada del circuito lógico:

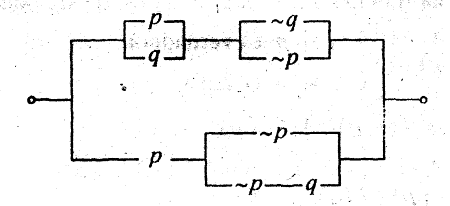


y sea Y la proposición más simplificada de

$$[(p \wedge s) \vee (p \wedge \sim s)] \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

Construir el circuito lógico mas simplificado correspondiente a $Y \rightarrow X$.

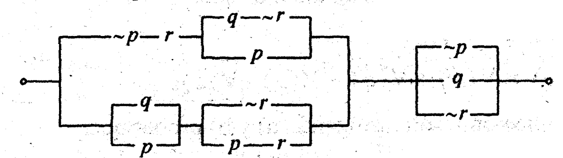
19 Sea A la proposición lógica más simple del circuito lógico:



y B la proposición lógica más simple de la proposición $(p * q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ donde $[(p * q) \rightarrow p]$ es equivalente a $(p \leftrightarrow q)$

Encontrar el valor de verdad de la proposición $A \longleftrightarrow B$

20 Dado el siguiente circuito lógico.



dar el circuito equivalente, más simplificado posible.

21 Sean A el circuito lógico más simple correspondiente a las proposición: $[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [(p \wedge s) \vee (p \wedge \sim s)]$ y B el circuito lógico más simple equivalente a:

Construir el circuito lógico simplificada correspondiente a: $A \Rightarrow B$

22 Se definen los conectivos $\downarrow$ y $\oplus$ mediante

$p \downarrow q \equiv p \wedge (p \to \sim q)$ y

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Expresar ambos conectivos en términos de la conjunción y negación.

23 Sea $A = \{\, p/p \text{ es proposición } \}$

$B = \{0,1\}$

Definimos una función $f: A \to B$ en la forma siguiente:

$$\forall\, p \in A\,,\ f(p) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } p \text{ es verdadera} \\ 0\ , & \text{si } p \text{ es falsa} \end{cases}$$

Si se sabe que $f(\sim p) = 1 - f(p)$

a) Demostrar:

i) $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$

ii) $f(p \vee q) = f(p) + f(q) - (p \wedge q)$

b) Hallar:

i) $f(p \to q)$

ii) $f(p \,\Delta\, q)$

24 Si definimos: $p * q \equiv (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$

$p \# q \equiv \sim p \vee \sim q$

$p \, \theta \, q \equiv \sim (p \rightarrow q)$

Valuar la tabla de verdad de las siguientes proposiciones:

(1) $(p \rightarrow q) \# (p \, \theta \, q)$

(2) $[(p * r) \# q] \, \theta \, (q \# r)$

(3) $(p \# r) \wedge (r * q)$

(4) $\sim (p \# q) \vee \sim (p \, \theta \, r)$

(5) $[(\sim p \wedge \sim r) \rightarrow (r \# p)] \, \theta \sim q$

(6) $\{[(p \, \Delta \, r) \# q] \rightarrow s\} \, \theta \, \{(p \, \theta \, r) * (p \# s)\}$

25 Si $p \uparrow q \equiv \sim p \vee \sim q$. Escribir en términos del conectivo "$\uparrow$" cada una de las siguientes proposiciones:

1. $\sim p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $p \rightarrow q$
5. $p \, \Delta \, q$
6. $p \leftrightarrow q$
7. $p \wedge (q \vee p)$
8. $(p \wedge q) \rightarrow p$

26 Si $p \downarrow q \equiv \sim p \wedge q$, expresar las siguientes proposiciones solamente en términos del conectivo $\downarrow$.

1. $(p \rightarrow q) \wedge p$
2. $(p \wedge q) \vee p$
3. $(\sim p \leftrightarrow q) \wedge \sim p$

27 a) Utilizando leyes lógicas, simplificar la proposición compuesta:

$[\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p)] \wedge [p \vee q]$

b) Partiendo de la composición compuesta:

$\{p \leftrightarrow [p \wedge \sim (q \vee r)]\}$, llegar a la proposición $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$.

28 Si p y q son proposiciones, definimos la operación $p * q$ mediante la tabla siguiente:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

a) Hallar $p * q$ en términos de $\wedge$, $\sim$.

b) Construir una tabla de valores de verdad para : $(p * q) * r$.

c) Hallar $p * p$.

d) Escribir una proposición equivalente a $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$ en términos del conectivo $*$.

29 Sea "X" la proposición equivalente más simplificada de la proposición compuesta: $(p \wedge q) * (q \vee r)$ donde $p * q \equiv \sim (\sim p \rightarrow q)$, y sea "$Z$" la proposición equivalente más simplificada que representa a la proposición $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \wedge p)$.

Hallar el circuito lógico más simple que representa a la proposición: $X * Z$.

30 Si p, q, r, s, t, x representan proposiciones y se sabe que:
$(\sim p) \vee q$ es V
$t \wedge \sim s$ es F
$s \rightarrow p$ es V
Siendo q : "4 es un número primo"
Deducir la V o la F de cada una de las siguiente proposiciones:
a) $(q \rightarrow p) \wedge \sim (t \wedge s)$
b) $[p \wedge (q \rightarrow p)] \vee [x \vee (\sim s \rightarrow \sim x)]$

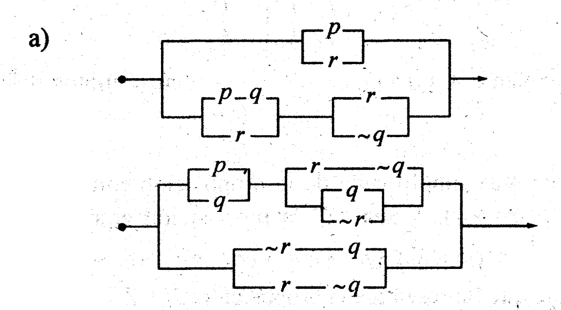
31 Dadas las proposiciones compuestas denotadas por a, b y c respectivamente:
$a : p \longleftrightarrow \sim (q \wedge r)$ $b : \sim p \,\Delta \sim r$
$c : \sim (p \wedge q) \vee \sim r$
Determinar si $a \rightarrow c$ y $b \rightarrow c$ son tautologías.

32 Si p, q, r, s son proposiciones.
Si $\{(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)\}$ es FALSA, deducir el valor de verdad de:
a) $(\sim p \,\Delta\, q) \vee \sim q$ b) $(p \rightarrow r) \rightarrow (p \vee s)$
c) $(\sim r \wedge q) \leftrightarrow (\sim q \wedge s)$

33 Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que:
$X : (p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es V
$Y : (\sim w \rightarrow \sim s)$ es F
Hallar el valor de verdad de las proposiciones: $m: [t \rightarrow (w \vee \sim p) \wedge \sim (p \rightarrow r)]$
$n : (s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \vee \sim p)$.

34 Sean A y B las expresiones lógicas que representan a los circuitos a) y b) respectivamente. Si el costo de cada llave repercute en forma significativa en el costo total del circuito. Halle el circuito lógico más económico correspondiente a $B \rightarrow A$.

a)



35 Considere el circuito lógico siguiente:

Si el costo de cada llave repercute en forma significativa en el costo total del circuito. Hallar un circuito equivalente que sea el más económico posible.

36 Un estudiante rinde un examen de tipo verdadero–falso, que consiste de cinco preguntas. Sabe que su profesor siempre plantea más preguntas verdaderas que falsas, y que nunca plantea tres preguntas consecutivas que tengan las mismas respuestas. Por la naturaleza de la primera y la última pregunta, sabe que éstas deben de tener respuestas contrarias.

De la única pregunta que conoce la respuesta es la segunda y esto le asegura tener las respuesta correctas.

a) ¿Qué sabe él sobre la pregunta dos?
b) ¿Cuáles son las respuestas a las cinco preguntas?
Justifique con base lógica.

37 Se cuentan con pantalones que pueden tener las siguientes características : desteñidos, estrechos y con pretina.
Se sabe que en sus roperos respectivos, Ana tiene unos pantalones estrechos y con pretina, y unos pantalones desteñidos sin pretina ; que Beatriz tiene unos pantalones sin pretina y unos pantalones desteñidos, estrechos y con pretina, por último, que Carmen tiene pantalones anchos, y unos pantalones oscuros, estrechos y con pretina.
Si un día, Ana, Beatriz y Carmen se dan cuenta que llevan unos pantalones idénticos, ¿cuáles son las características comunes en estos pantalones?
Justifique su solución mediante la lógica proposicional.

38 Determinar la validez o la invalidez de la siguiente proposición compuesta: “Si tiene un solo elemento, se llama conjunto unitario. Si no tiene elemento alguno, se llama conjunto vacío. Tiene un solo elemento o no tiene elemento.
En consecuencia, se llama “conjunto unitario o se llama conjunto vacío”.

39 Suponga que A, B y C representan opiniones que serán favorables o desfavorables cuando una cierta decisión es estudiada. Suponga también que se desea que la decisión sea aceptada sólo cuando A es favorable o B es favorable (pero no ambas) y C es desfavorable.

Diseñar un circuito que sea favorable sólo en estas condiciones.

40 Supóngase que un estudio ha mostrado que la fracción de fumadores entre los que tienen cáncer pulmonar es mayor que la fracción de fumadores entre los que no tienen cáncer pulmonar. Se asegura entonces que la fracción de fumadores que tienen cáncer pulmonar es mayor que la fracción de no fumadores que tienen cáncer pulmonar.
Analizar si este argumento es válido.

41 Un hombre al margen de la ley es capturado por las fuerzas del orden y puesto en una cárcel que tiene dos túneles de salida. El jefe de las fuerzas del orden ofrece al prisionero la siguiente oportunidad de escapar:

"Uno de los túneles conduce a una muerte segura y el otro a la libertad. Puedes salir por cualquier túnel. Para ayudarte a tomar una decisión, dos de mis subalternos permanecerán contigo y responderán a cualquier pregunta única que tú quieras hacerles. Debo advertirte, sin embargo, de que uno de mis subalternos es completamente veraz, mientras que el otro miente siempre".

Se va luego el jefe, creyendo que ha dado al prisionero sólo una deportiva oportunidad de escapar. Después de pensar un momento, el prisionero de rápido ingenio hace una pregunta y luego escoge el túnel que conduce a la libertad.
¿Qué pregunta hizo? Justifique su respuesta.

42 El señor García dice a su hija: acudirás a las fiestas, mi querida hija, si cumples las siguientes reglas:

1) En toda fiesta que no uses anteojos, debes usar falda larga.
2) Si usas anteojos y falda larga en la misma fiesta, entonces no debes usar aretes.
3) Si usas aretes y no usas anteojos entonces no debes usar falda larga.

La señorita García está de acuerdo, pero algo confusa, y acude a un estudiante de ciencias para que simplifique el texto anterior. ¿Cuál es la orden simplificada?.

43 Simbolice:

a) Cualquiera de los dos P o Q pero no ambos
b) ninguno de los dos P o Q
c) P pero no Q
d) P sólo cuando Q
e) P implica Q, y a la inversa

44 Encontrar expresiones equivalentes para la negación de los siguientes:

a) x es racional y $x > 3$ y $x \neq \frac{10}{3}$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces es absolutamente convergente.

c) Si $b > 0$ y $|a| < b$, entonces $-b < a < b$.

45 Explicar la lógica de los siguientes argumentos acerca de los números reales:

a) $-1<0$, por otra parte $0=-1+1\geq 1$

b) $x^2 \neq -1$ del momento en que $x^2 > 0 > -1$.

c) Suponer que $x>0$ y $(x+1)(x-2)=0$. Entonces $x=2$.

d) $x^2+y^2=0$ si y sólo si $x=y=0$. En realidad, si $x=y=0$, entonces $x^2+y^2=0$. Inversamente, si $x\neq 0$ o $y\neq 0$, entonces $x^2+y^2>x^2>0$, así $x^2+y^2\neq 0$.

e) $\sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}$ no tiene soluciones, a partir de $\sqrt{x+1}=\sqrt{x+2}$ nosotros deducimos $x+1=x+2$ de donde $1=2$.

46 Sea c un número real positivo y x un número real. Recordar el hecho

$$|x|<c \longleftrightarrow -c<x<c \quad \text{...........} \ (*)$$

Explicar cómo se resuelve la desigualdad $|x|\geq c$ en base de (*) y las resultados de este capítulo.

47 Justificar: si $\sim p \rightarrow p$ es verdadero, entonces p es verdadero.

48 Expresar $P\rightarrow Q$ solamente en términos de P, Q, $\sim$, $\wedge$

49 Probar:

a) $P\wedge P \longleftrightarrow P$.

b) $[(P\rightarrow Q) \ \wedge \ (R\rightarrow S)] \ \rightarrow \ [P\wedge R \rightarrow Q\wedge S]$.

c) $[P\wedge(P\vee Q)] \longleftrightarrow P$.

d) $P\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$.

50 Definimos: P/Q mediante $\sim P\vee\sim Q$.

a) Escribir la tabla de verdad para P/Q

b) Probar: $\sim P \longleftrightarrow (P/P)$,

$(\sim P/\sim Q) \longleftrightarrow (\sim P/P)/(Q/Q)$

c) Usar (b) para encontrar expresiones solamente en términos de P, Q y el cual es equivalente a $P\vee Q$, $P\wedge Q$, $P\rightarrow Q$, $P\leftrightarrow q$.

LÓGICA MATEMÁTICA

Representar cada uno de los siguientes enunciados usando simbología lógica :

51 "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería".

52 "Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene una pase"

53 "Hoy es domingo y tengo que estudiar teorías de aprendizaje o no aprobaré el curso"

54 "El candidato del APRA dice: si salgo electo presidente de la República recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Analice la tabla de verdad correspondiente.

55 "Es buen estudiante, si y solo si, tiene promedio de diez"

56 "Si no pago la luz, entonces me cortarán la corriente eléctrica. Y si pago la luz, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la deuda, si y solo si soy desorganizado".

57 ¿Es válido el siguiente argumento?

Si usted invierte en el mercado de valores, entonces se hará rico.
Si se hace usted rico, entonces será feliz

∴ Si usted invierte en el mercado, entonces será feliz

58 ¿Es válido el siguiente argumento?

Si bajan los impuestos, entonces se eleva el ingreso.
El ingreso se eleva

∴ Los impuestos bajan

59 Sean P : trabajo ; q : Ahorro ; r : compraré una casa ;
S : Podré guardar el coche en mi casa.

Usando tautologías y las reglas de inferencia probar el siguiente argumento :

"Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro".

60 Demostrar por el método de contradicción el siguiente teorema

$[p \rightarrow (p \wedge r)] \wedge [(q \vee s) \rightarrow t] \wedge (p \vee s) \rightarrow t$

RESPUESTAS:

51 p : el coche enciende , q : tiene gasolina el tanque,
r : tiene corriente la batería , $p = q \wedge r$

52 p : entra al cine , q : compra su boleto,
r : obtiene un pase , $p = q \vee r$.

53 p : Hoy es domingo; q : tengo que estudiar teorías de aprendizaje;
r : Aprobaré el curso. $p \wedge q \wedge r$.

54 p : Salió electo Presidente de la república
q : Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año. $p \rightarrow q$

55 p : Es buen estudiante; q : Tiene promedio diez;
$p \longleftrightarrow q$

56 p : Pago la luz; q : Me cortarán la corriente eléctrica;
r : Me quedaré sin dinero; s : Pediré prestado,
t : Pagar la deuda; w : soy desorganizado.

$$(\sim p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \wedge s) \rightarrow \sim t] \longleftrightarrow w$$

57 p : Usted invierte en el mercado de valores.
q : Se hará rico.
r : Será feliz.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \rightarrow r \end{array}$$

58 p : Los impuestos bajan.
q : El ingreso se eleva.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

59 $(p \vee q) \rightarrow r$ y $r \rightarrow s$, entonces $\sim s \rightarrow \sim q$.

Debo probar $[(p \vee q)] \rightarrow r] \wedge [r \rightarrow s] \rightarrow [\sim s \rightarrow \sim q]$

Se aplica el procedimiento general para demostración de enunciados válidos. A continuación se demuestra el teorema respaldando cada uno de sus pasos en tautologías de inferencia ya conocidas.

1. $(p \vee q) \rightarrow r$ hipótesis
2. $r \rightarrow s$ hipótesis
3. $q \rightarrow (q \vee p)$ Adición tautológica
4. $q \rightarrow (p \vee q)$ 3, ley conmutativa
5. $q \rightarrow r$ 4 ; 1 ; silogismo hipotético
6. $q \rightarrow s$ 5 ; 2 ; silogismo hipotético
7. $\sim s \rightarrow \sim q$ 6 ; contra positiva

El enunciado es válido aunque la conclusión puede ser falsa o verdadera.

60 Demostración:

1. $p \rightarrow (p \wedge r)$ hipótesis
2. $(q \vee s) \rightarrow t$ hipótesis
3. $p \vee s$ hipótesis
4. $\sim t$ negación de la conclusión
5. $\sim (q \vee s)$ 2, 4 , Modus tollens
6. $\sim q \wedge \sim s$ 5 , Ley de Morgan
7. $\sim q$ 6 , Simplificación
8. $\sim s \vee \sim q$ 6, Ley conmutativa
9. $\sim s$ 8, simplificación
10. s y p 3, Ley conmutativa
11. p 10, 9, silogismo disyuntivo
12. $q \wedge r$ 11,1 , modus ponens
13. q 12, simplificación
14. $q \wedge \sim q$ 13, 7 conjunción
15. contradicción.

Representar cada uno de los siguientes enunciados usando simbología lógica y responder a la pregunta: ¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes afirmaciones?

61 $3+2=5$ y $5=1+4$, entonces $3+2=1+4$ (transitiva)

62 5 es mayor que 2 , por lo tanto 5 es mayor o igual que 2 (adición)

63 Si $a>4$, entonces $a^2>16$

Si $a^2>16$, entonces $a^2+3>19$

Por lo tanto, si $a>4$, entonces $a^2+3>16$ (silogismo hipotético)

64 Juan Pérez es médico o ingeniero
Juan Pérez no es médico.
Entonces Juan Pérez es ingeniero. (Tollendo Ponens)

65 José saca una bola numerada de una urna, ve el número que tiene la bola.
José no ve el número de la bola.
Por lo tanto, José no saca una bola de la urna. (modus tollens)

66 Pepito mide 1.20 metros, entonces pesa más de 40 kilogramos.
Pepito mide 1.20 metros.
Por lo tanto, Pepito pesa más de 40 kilogramos (modus Ponens)

67 4 y 8 son divisores de 32.
Entonces 4 es divisor de 32. **(simplificación)**

¿Cuáles de las siguientes parejas de proposiciones compuestas son equivalentes?

68 A : $p \rightarrow q$, B : $p \vee q \longleftrightarrow q$

69 A : $p \rightarrow q$, B : $p \wedge q \longleftrightarrow p$

70 A : $p \wedge \sim q$, B : $p \wedge \sim (p \wedge q)$

71 A : $p \vee (p \wedge q)$, B : p

72 A : $p \wedge (p \vee q)$, B : p

73 A : $p \wedge \sim (q \wedge r)$, B : $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$

74 A : $p \wedge \sim (p \wedge q)$, B : $p \wedge \sim q$

75 A : $p \vee q$, B : $(p \Delta q) \vee (p \wedge q)$

76 A : $p \wedge q$, B : $(p \wedge q) \wedge \sim (p \Delta q)$

77 A : $p \wedge \sim q$, B : $(p \Delta q) \wedge \sim q$

78 A : $p \wedge \sim (p \Delta q)$, B : $p \wedge q$

79 A : $p \wedge (q \wedge \sim r)$, B : $(p \wedge q) \wedge \sim (p \wedge r)$

80 A : $p \Delta q$ B : $(p \vee q) \wedge \sim (q \vee p)$

ᢁ

Simplificar:

81 $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \sim p)$

82 $\sim p \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

83 $[(p \rightarrow q) \vee p] \wedge [(p \rightarrow q) \vee \sim p]$

84 $[\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p)] \wedge [p \vee p]$

¿Cuáles de las siguientes pares de enunciados son equivalentes?

85 $7x = 14$; $3x = 6$

86 $a^2 < b$ con $b > 0$; $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

87 $|a| < b$, con $b > 0$; $-b < a < b$

88 $x^2 = 4$; $x = 2$

89 $x^2 = 4$; $x = 2 \vee x = -2$

90 $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{9} = 3 \vee \sqrt{9} = -3$

LÓGICA MATEMÁTICA

Marque la respuesta correcta.

01 La negación de $p \to q$ es:

a) $\sim p \wedge q$ b) $q \wedge p$ c) $p \wedge \sim q$ d) $\sim p \wedge q$

02 La proposición: $(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \vee q) \longleftrightarrow (p \wedge q)]$ es:

a) Tautología b) indeterminada c) contradicción d) Ninguna anterior

03 $p \wedge (q \oplus r)$ equivale a $(p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$ en lógica binaria esto es:

a) imprevisible
b) parcialmente falso
c) correcto
d) parcialmente imposible.

04 Señale la existencia, si existiera, una contradicción o absurdo:

a) $p \to (p \to p)$
b) no hay ninguno
c) $(p \wedge q) \to p$
d) $[q \wedge (q \to \sim p) \wedge (p \to \sim q)] \to q$

05 Señale, si hay, la tautología:

a) $[(\sim p \to q) \wedge (p \to q)] \to q$
b) $[(p \to q) \wedge (p \vee q)] \to \sim q$
c) $p \vee q$
d) ninguna de las anteriores.

06 Sean A contradicción o absurdo y T una tautología. Señalar la única contradicción.

a) $(p \longleftrightarrow \sim p) \longleftrightarrow A$
b) $(A \vee T) \longleftrightarrow T$
c) $q \to p$
d) $[\sim(\sim p) \longleftrightarrow p] \longleftrightarrow A$

07 Una ley de De Morgan es:

a) $(\sim p \vee \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \vee q)$
b) $\sim(p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
c) $(\sim p \wedge \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \wedge q)$
d) $(\sim p \vee q) \longleftrightarrow (p \vee \sim q)$

08 La forma equivalente de la expresión $\sim(p \to q) \wedge p$ es:

a) $p \wedge \sim q$
b) $(p \vee \sim q)$
c) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
d) $p \vee q \vee \sim q$

09 Señale la expresión equivalente a la frase $(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$

a) $q \rightarrow q$
b) $p \rightarrow q$
c) $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim p$
d) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

10 Si $p \oplus q \equiv \sim(p \wedge q)$, se deduce:

a) $p \rightarrow \sim q$
b) $p \wedge q$
c) $p \rightarrow q$
d) $q \rightarrow q$

11 Sea A contradicción o absurdo y T una tautología. Señalar la única tautología.

a) $(p \longleftrightarrow \sim p) \longleftrightarrow T$
b) $(A \wedge T) \longleftrightarrow T$
c) $T \rightarrow (p \rightarrow p)$
d) $[\sim(\sim p) \longleftrightarrow p] \longleftrightarrow A$

12 Una ley de De Morgan es:

a) $\sim(\sim p) \longleftrightarrow p$
b) $\sim(p \wedge q) \longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
c) $(\sim p \wedge \sim q) \longleftrightarrow \sim(p \wedge q)$
d) $\sim(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$

13 "Es posible que p sea necesario" equivale a "Es posible que $\sim p$ sea imposible". Esta afirmación es:

a) cierta
b) falsa
c) depende de p
d) Ninguna de las 3

14 Si $p \oplus q$ entonces:

a) $p \rightarrow \sim q$
b) $p \wedge q$
c) $p \rightarrow q$
d) $q \rightarrow p$

15 La proposición $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ es equivalente a:

a) $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$
b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$
c) $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$
d) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee s)$

16 Señale el razonamiento mal hecho:

A) $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{p \wedge \sim q} \\ \lambda \end{array}$

B) $\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\quad p} \\ q \end{array}$

a) sólo A   b) sólo el B   c) ambos   d) ninguno

17 p es posible si y sólo si.

a) p es imposible
b) es necesario que no p
c) es necesario que p
d) no es necesario que no p.

18 Señalar el razonamiento incorrecto

A)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ r \wedge s \\ q \wedge \sim s \\ \hline \sim p \end{array}$$

B)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ q \rightarrow (s \wedge t) \\ \hline \lambda \end{array}$$

a) sólo el B b) ambos   c) ninguno   d) sólo el A.

19 Señale el razonamiento mal hecho:

A)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \wedge \sim q \\ \hline \lambda \end{array}$$

B)
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

a) sólo el A b) sólo el B c) ambos   d) ninguno.

20 Señale, si existiera, una contradicción o absurdo.

a) $p \rightarrow (p \rightarrow p)$
b) No hay ninguna
c) $(p \wedge q) \rightarrow p$
d) $[q \wedge (q \rightarrow \sim p) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \rightarrow q$

Respuestas:

01) c	02) a	03) c	04) b	05) a	06) d	07) b
08) a	09) c	10) a	11) c	12) b	13) a	14) a
15) c	16) d	17) d	18) a	19) d	20) b	

Negar los siguientes enunciados:

01 $p \ : \ x<2 \vee x>-3$

02 $q \ : \ -1<x<2$

03 $r \ : \ x=2$

04 $Q \ : \ 3x \neq 2$

05 $P \ : \ \forall\, x \in I\!R / (x-2)^2 \geq 0$

06 $R \ : \ \sim(p \wedge q) \vee q$, además simplificar.

Simplificar las siguientes proposiciones:

07 $(p \, \Delta \, q) \wedge (p \wedge \sim q)$

08 $(p \wedge q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$

09 $(\sim q \wedge p) \vee (p \wedge q)$

10 $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \wedge q)$

11 $(\sim q \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p \vee q)$

12 $(\sim p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

13 $(p \vee q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

14 $(p \wedge q \wedge r) \wedge [\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim r]$

15 $[\sim p \wedge (p \vee q)] \vee [\sim(p \vee r) \wedge \sim q]$

CONJUNTOS

INTRODUCCIÓN

Se dice que un concepto es ***primitivo***, cuando dicho ***concepto se admite sin definición***. Así los conceptos de conjunto, de elemento y la relación de pertenencia son conceptos primitivos en las matemáticas.

2.1 NOCIÓN DE CONJUNTO

Toda agrupación o colección de objetos es considerada como CONJUNTO, siempre que exista un criterio preciso que nos permita afirmar que un objeto pertenece o no a dicha agrupación.

Los objetos que "pertenecen al conjunto" se llaman sus elementos.

2.2 NOTACIÓN Y CONVENIOS INICIALES

Los conjunto se denotan con letras mayúsculas: A , B , C , … , A_1 , A_2 , … , B_1 , B_2 , …
Los elementos se denotan con letras minúsculas: a , b , c , … , a_1 , a_2 , a_3 , … , b_1 , b_2 , b_3 , … , x_1 , x_2 , …

2.2.1 RELACIÓN DE IGUALDAD

En matemáticas, los objetos en estudio son elementos o conjuntos y una relación entre elementos o entre conjuntos es la relación de igualdad que se denota por el símbolo "=" (igual).

Así tendremos que si a y b son elementos de algún conjunto, la notación $a = b$ nos indica que a y b representan el mismo elemento.

Si A y B son conjuntos, la notación $A = B$ nos indica que A y B representan al mismo conjunto.

2.2.2 PROPIEDADES DE IGUALDAD DE ELEMENTOS

P₁) $a = a$, $\forall a$ (Propiedad reflexiva)

P₂) $a = b$ implica $b = a$ (Propiedad simétrica)

P₃) Si $a = b \wedge b = c$ implica $a = c$ (Propiedad transitiva)

2.3 RELACIÓN DE PERTENENCIA

La relación de ***elemento a conjunto*** es de ***pertenencia***.

La notación: " $x \in B$ " se lee "x pertenece a B"
indicando así, que x forma parte del conjunto B.

La negación de p : $x \in B$
es $\sim p$: $x \notin B$ y se lee "x no pertenece a B"

Si la proposición p: $x \in B$ es **VERDADERO**, entonces la proposición: $x \notin B$ es **FALSO**.

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{x \in I\!R \,/\, x^2 - 4 = 0\}$ $C = \{x \in I\!R \,/\, a^{x+1} = 1\}$, $a \neq 1$, $a > 0$

$B = \{x \in I\!R \,/\, x^2 + 4 = 0\}$ $D = \{x \in I\!R \,/\, 0 < x < 1\}$

Entonces tenemos:

(1) $2 \in A$, porque $2 \in I\!R$ $\wedge$ 2 satisface la ecuación $x^2 - 4 = 0$

(2) $-2 \in A$, porque $-2 \in I\!R$ $\wedge$ -2 satisface la ecuación $x^2 - 4 = 0$

(3) $2 \notin B$, porque $2 \in I\!R$ $\wedge$ 2 no satisface la ecuación $x^2 + 4 = 0$

(4) $-1 \in C$, porque $-1 \in I\!R$ $\wedge$ -1 satisface la ecuación $a^{x+1} = 1$

(5) $\frac{1}{3} \in D$, porque $\frac{1}{3} \in I\!R$ $\wedge$ $0 < \frac{1}{3} < 1$

(6) $\frac{5}{16} \in D$, porque $\frac{5}{16} \in I\!R$ $\wedge$ $0 < \frac{5}{16} < 1$

(7) $\frac{4}{3} \notin D$, porque $\frac{4}{3} \in I\!R$ pero, $\frac{4}{3}$ no es menor que 1.

2.4 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos que se estudian en las matemáticas, son: Los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números irracionales, los números reales y los números complejos.

① EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\ldots,n,\ldots\}$

② EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-n,\ldots,-3,-2,-1,\underbrace{0,1,2,3,\ldots\ldots,n,\ldots}_{\mathbb{N}}\}$$

③ EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} / m \in \mathbb{Z} \;\wedge\; n \in \mathbb{Z} \;,\; n \neq 0 \right\}$

Algunos números racionales son: $-\frac{m}{n}\ldots -1\ldots -\frac{1}{2}\ldots -\frac{1}{3}\ldots 0\ldots \frac{1}{2}\ldots 1\ldots \frac{5}{4}\ldots 2\ldots \frac{m}{n}\ldots$

NOTA: Los números racionales contienen a los $\mathbb{N}$ y a los $\mathbb{Z}$.

④ EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES:

Es el conjunto de los números NO RACIONALES, es decir, aquellos números que no pueden expresarse como fracciones de la forma: $\frac{m}{n}$, con m y $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
Por ejemplo, son números irracionales:

$$-\pi \ldots 3^{2/3} \ldots -e \ldots -2^{1/5} \ldots -\sqrt[3]{2} \ldots -\sqrt[3]{9} \ldots \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{3/5} \ldots \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots \sqrt{2} \ldots \sqrt{3}$$

Hay dos números irracionales muy importantes en las matemáticas:

Dichos números son:

i) El número: π (pi), cuya aproximación decimal es $\pi \approx 3.1416$
El número π se obtiene de la relación que existe entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, es decir:

$$\pi = \frac{C}{2R} \begin{cases} C = \text{longitud circunferencial} \\ R = \text{radio} \end{cases}$$

ii) El número: "e", cuya aproximación decimal es $e \approx 2.7182$
El número "e" es un límite:

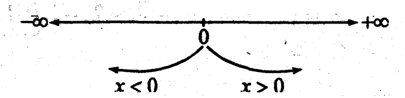
$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots \frac{1}{n!} + \ldots$$

(5) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES: $\mathbb{R}$

El conjunto de los números **REALES**, es la reunión de los números racionales, con los números irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Intuitivamente los números reales se representa por una recta y la llamamos **RECTA REAL**.



NOTA DE ACLARACIÓN:

El conjunto de todos los números reales no se puede expresar por extensión. Sin embargo existen subconjuntos de números reales que sí se pueden expresar por extensión, tales como las sucesiones:

$$A = \left\{ x_n = \frac{n}{n+1} \Big/ n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad B = \left\{ y_n = 2^n \Big/ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Los subconjuntos de números reales que no se pueden expresar por extensión son los intervalos, tales como:

$$\langle -\infty, +\infty \rangle = \{ x / x \in \mathbb{R} \}$$

$$\langle 0,1 \rangle = \{ x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1 \}$$

$$[0,1] = \{ x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1 \}$$

$$\langle -4, +\infty \rangle = \{ x \in \mathbb{R} / x > -4 \}$$

La definición **AXIOMÁTICA** de los números reales, la daremos más adelante. Por ahora, interesa que el estudiante tenga una **CLARA IDEA** de los números reales.

(6) EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS: $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \,/\, a \in \mathbb{R} \;\wedge\; b \in \mathbb{R} \;,\; i = \sqrt{-1} \}$$

Se lee: "Los números complejos, es el conjunto de los números de la forma "$a + bi$", tales que a y b pertenecen a los números reales, donde $i = \sqrt{-1}$ ".

NOTA:
La suma " $a + bi$ " también se representan por el par ordenado (a, b), donde la primera componente "a" se llama **PARTE REAL** y la segunda componente "b" se llama **PARTE IMAGINARIA**.

Simbólicamente es así:

Si $z = a + bi$, entonces $\begin{cases} a = \text{Re}(z) \\ b = \text{Im}(z) \end{cases}$

Además $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|z|$ = módulo de z

$$\theta = Arg(z) = arc\ tg\left(\frac{b}{a}\right),\ \text{donde } 0° \leq \theta < 2\pi$$

└ argumento de Z.

IMPORTANTE CONCLUSIÓN:

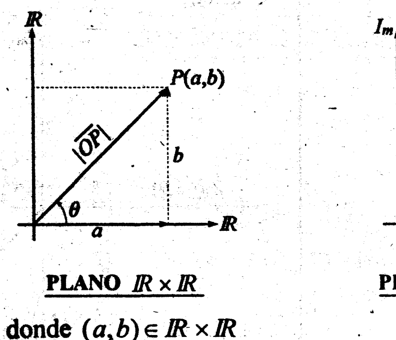
Como los números complejos se representan por pares ordenados y dichos pares ordenados **SON PUNTOS DEL PLANO** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entonces podemos extraer una importante conclusión: "Los números complejos son puntos de otro plano llamado PLANO COMPLEJO, que coincide con el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$".

Matemáticamente está "coincidencia" toma el nombre de **ISOMORFISMO ENTRE DOS CONJUNTOS.**

Para nuestro caso tenemos que "$\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$".

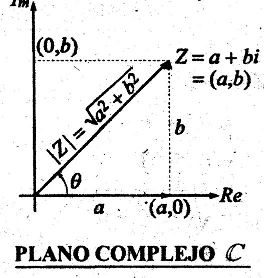
El estudio de los isomorfismos corresponde a otros cursos superiores de las matemáticas que no es de nuestra competencia en este momento.

Para una mejor idea, veamos gráficamente el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y el plano complejo $\mathbb{C}$:



PLANO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

donde $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



PLANO COMPLEJO $\mathbb{C}$

donde $(a,b) \in \mathbb{C}$

EJEMPLOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

01

$$Z_1 = 2+\sqrt{-4}$$
$$= 2+\sqrt{4(-1)}$$
$$= 2+\sqrt{4}\sqrt{-1}$$
$$Z_1 = 2+2i$$
$$Z_1 = (2,2)$$
$$|Z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\theta_1 = Arg(Z_1) = arctg\left(\tfrac{2}{2}\right) = arctg\,(1)$$
$$\theta_1 = \tfrac{\pi}{4}$$

02

$$Z_2 = 5$$
$$= 5+0i$$
$$Z_2 = (5,0)$$
$$|Z_2| = \sqrt{5^2+0^2}$$
$$= 5$$
$$\theta_2 = Arg(Z_2) = arctg\left(\tfrac{0}{5}\right)$$
$$= arctg(0)$$
$$\theta_2 = 0°$$

03

$$Z_3 = -5$$
$$= -5+0i$$
$$= (-5,0)$$
$$|Z_3| = \sqrt{(-5)^2+0^2}$$
$$= 5$$
$$\theta_3 = Arg(Z_3) = arctg\left(-\tfrac{0}{5}\right)$$
$$= arctg\,(0)$$
$$\theta_3 = \pi$$

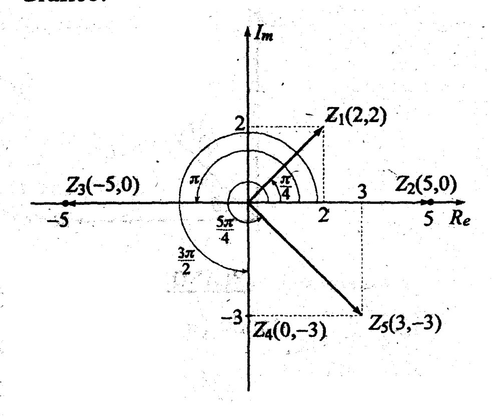
04

$$Z_4 = -3i$$
$$= 0-3i$$
$$|Z_4| = -3i$$
$$= 0-3i$$
$$\theta_4 = Arg(Z_4) = arctg\left(\tfrac{-3}{0}\right)$$
$$= arctg\,(+\infty)$$
$$\theta_4 = \tfrac{3\pi}{2}$$

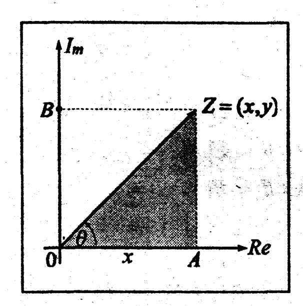
05

$$Z_5 = 3-3i$$
$$= (3,-3)$$
$$Z_5 = \sqrt{(3)^2+(-3)^2}$$
$$= 3\sqrt{2}$$
$$\theta_5 = Arg(Z_5) = arctg\left(\tfrac{-3}{3}\right)$$
$$= arctg\,(-1)$$
$$\theta_5 = \tfrac{5\pi}{4}$$

Gráfico:



FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS



1. Sabemos que: $\boxed{Z = x + iy} = (x, y)$

FORMA BINOMIAL

donde $\begin{cases} x = Re(Z) \\ y = Im(Z) \end{cases}$

2. En el triángulo rectángulo OAZ, recto en A tenemos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|Z|} \iff x = |Z|\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|Z|} \iff y = |Z|\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

3. Reemplazando (2) en (1): $Z = |Z|\cos\theta + i|Z|\operatorname{sen}\theta$

$$\boxed{Z = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$$

FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

4. Pero: $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$ y si $|Z| = r$ (Módulo de Z)

5. Reemplazando (4) en (3):

$$Z = |Z|e^{i\theta} \iff Z = re^{i\theta} \qquad r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = Arg(Z) = arctg\,\frac{y}{x}$$

FORMA EXPONENCIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

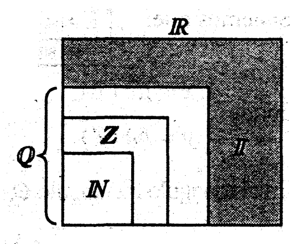
POTENCIAS DE $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{cases} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i \\ i = i \cdot i = (-1)(-1) = 1 \end{cases} \qquad i^n = \begin{cases} 1, \text{ si } n = \dot{4} \\ i, \text{ si } n = \dot{4} + 1 \\ -1, \text{ si } n = \dot{4} + 2 \\ i, \text{ si } n = \dot{4} + 3 \end{cases}$$

La notación $\dot{4}$ se lee "múltiplo de 4" es decir $\dot{4} = 4K$, $\forall K \in \mathbb{Z}$.

En consecuencia, cualquier potencia de i se reducen sólo a uno de los siguientes valores $\{i, -1, -i, 1\}$.

Usando los diagramas de Veen-Euler para representar los números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; tendremos:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$
$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

2.5 DETERMINACIÓN O DESIGNACIÓN DE CONJUNTOS

Un conjunto puede describirse de dos formas: por extensión y/o por comprensión.

2.5.1 DETERMINACIÓN POR EXTENSIÓN

Diremos que un conjunto se designa por ***extensión***, cuando es posible indicar explícitamente los elementos del conjunto, escribiéndolos uno a continuación de otro, separados por una coma y encerrados entre llaves $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Es decir, una lista de los elementos que forman el conjunto.

2.5.2 DETERMINACIÓN POR COMPRESIÓN

Un conjunto se designa **por compresión**, cuando los elementos del conjunto pueden expresarse mediante **una propiedad o más propiedades, que es característica única y común a ellos**.

EJEMPLOS

POR EXTENSIÓN

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se lee: "A es el conjunto formado por los números enteros consecutivos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6."

POR COMPRESIÓN

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 7\}$$

Se lee: "A es el conjunto de los "x" pertenecientes a los números enteros, tales que, las "x" sean mayores que 0 y menores que 7".

$B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$ | $B = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$C = \{ 1, 2, 4, 8, 16, \dots \}$ | $C = \left\{ 2^n / n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

$D = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$ | $D = \left\{ 2n / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ este **conjunto** son **los números** pares enteros positivos.

$E = \{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$ | $E = \left\{ 2n - 1 / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

o $\{ 2n + 1 / n \in \mathbb{N} \}$

éste conjunto son los números impares enteros positivos.

$F = \left\{ 1, x, x^2, x^3, \dots \right\}$ | $F = \{ x^n / n \in \mathbb{N} \}$

$G = \{ 5, 10, 15, 20, \dots \}$ | $G = \{ 5n / n \in \mathbb{Z}^+ \}$

$H = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\}$ | $H = \left\{ \frac{1}{2^n} / n \geq 2, n \in \mathbb{N} \right\}$

$I = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots \right\}$ | $I = \left\{ \frac{n}{n^2 + 1} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

$J = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{17}, \dots \right\}$ | $J = \left\{ \frac{n}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

Tener en cuenta que: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

2.6 CONJUNTOS BIEN DEFINIDOS

Diremos que un conjunto esta bien definido, si **podemos conocer todos los elementos del conjunto.**

Es decir, si dado cualquier objeto podemos afirmar si dicho objeto pertenece o no al conjunto.

PROBLEMAS

01. Dados los conjuntos:

$A = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle/ p, q \in \mathbb{N} \wedge \text{ uno por lo menos es } 5 \right\}$

$B = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle/ p, q \in \mathbb{N} \wedge q \neq 0 \wedge p+q = \text{múltiplo de } 2 \right\}$

$C = \left\{ x = \frac{p}{q} \middle/ p, q \in \mathbb{N} \wedge q \neq 0 \wedge q \geq p \right\}$

$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle/ x = \frac{5-2K}{5}, K = 0,1,2 \right\}$

$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle/ x = \frac{5}{5+2K}, K \in \mathbb{N} \right\}$

Demostrar que: $A \cap B \cap C \subset E_1 \cup E_2$

R: $A = \left\{ \frac{5}{q} \middle/ q \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup \left\{ \frac{p}{5} \middle/ p \in \mathbb{N} \right\}$

$B = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}, \frac{7}{1}, \ldots, \frac{2}{4}, \frac{4}{2}, \ldots, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \ldots \frac{5}{7}, \frac{7}{5}, \ldots \right\}$

$C = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{1}{5}, \ldots, \ldots \frac{3}{5}, \ldots, \frac{5}{5}, \ldots, \frac{5}{7}, \ldots\ldots \right\}$

$A \cap B \cap C = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \ldots \right\}$

$E_1 = \left\{ \frac{5}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right\}$, $E_2 = \left\{ \frac{5}{5}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}, \frac{5}{13}, \frac{5}{15}, \ldots \right\}$.

02. a) ***Definición***: Sea A un conjunto y T una colección de subconjuntos de A que cumplen:

i) ϕ y A están en T.
ii) Una reunión cualquiera de elementos de T, está en T.
iii) Una intersección de n elementos de T están en $T\,(n = 2, 3, \ldots)$.

Si $A = \{1,2,3\}$, hallar todas las colecciones de subconjuntos T definidades en A

b) Sean los conjuntos: $A = \{0,1,3,7,8,9\}$; $B = \{1,5\}$; $C = \{0\}$

¿Cuántos subconjuntos de A no vacíos. cumplen la condición de que no están incluidos en $B \cup C$?

03. Dado $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Si $A = \{x \in U \,/\, 2 \leq x < 7\}$

$B = \{x \in U \,/\, (x-2)(x^2 - 11x + 28) = 0\}$

$C = \{x \in U \,/\, x \leq 3\}$

hallar todos los subconjuntos X de U tales que: $X \subset (A-B) \ \wedge \ X \not\subset (A \cap \complement C)$

04. Dado los conjuntos $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, E conjunto universal.

$E = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x < 10\}$

Si: $\complement A = \{x \in E / x < 7\}$

$A \cup B = \{x \in E / x \leq 9 \ \wedge \ x > 2\}$

$B \cup C = \{x \in E / x \leq 7\}$

$B \cap C = \{3\}$

$A \cap C = \complement A \cap \complement B \cap \complement C = \phi$

Determinar A, B , C .

05. Sean los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{Z} / x$ es impar$\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / x$ es múltiplo de $5\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 100 \ \vee \ x^2 < 25\}$

Utilizando sólo comprensión, determinar el conjunto $(\complement C \cup B) - \complement A$.

2.7 CUANTIFICADORES: EXISTENCIAL Y UNIVERSAL

Introducción.- Toda expresión que contiene una o más variables es un enunciado abierto.

Ejemplos:

$P(x)$: $0 < x < 2$

$Q(y)$: $(y-1)^2 \geq 0$

$E(n)$: $1+2+3+ \ldots\ldots + n = \frac{n(1+n)}{2}$.

$E(x,y)$: $x^2 + y^2 \leq 25$

A partir de estos enunciados abiertos se pueden construir proposiciones asignando a cada variable valores tomados de un cierto conjunto.

Por ejemplo:

1) En $P(x)$: $0 < x < 2$, si asignamos a la variable x cualquier valor $x \in \mathbb{N}$, obtendremos las siguientes proposiciones:

$P(2)$: $0 < 2 < 2$ (F)

$P(1)$: $0 < 1 < 2$ (V)

2) En $Q(y):(y-1)^2 \geq 0$, si $y \in I\!R$, obtenemos las siguientes proposiciones:

$Q(-1)$: $(-2)^2 \geq 0$ (V)

$Q(1/3)$: $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \geq 0$ (V)

3) En $E(n)$: $1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(1+n)}{2}$, si $n \in \mathbb{Z}^+$, obtenemos las siguientes proposiciones:

$E(2)$: $1+2=\frac{2(1+2)}{2}$ (V)

$E(5)$: $1+2+3+4+5=\frac{5(1+5)}{2}$ (V)

4) En $E(x,y): x^2+y^2 \leq 25$, si $(x,y) \in I\!R^2$, obtendremos las siguientes proposiciones:

$E(0,-5)$: $0 + 25 \leq 25$ (V)

$E(-2,-5)$: $4 + 25 \leq 25$ (F)

Ahora, si a cada enunciado abierto le anteponemos la expresión "para todo" o la expresión "existe", estaremos obteniendo nuevas proposiciones cuantificadas universalmente o existencialmente, respectivamente.

2.7.1 CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Si a una proposición abierta $P(x)$, donde los valores de la variable x están definidas sobre un conjunto A, le anteponemos la expresión "**PARA TODO** x", obtenemos una proposición de la forma:

"Para todo $x \in A$, $P(x)$ es verdadero" que se simboliza por "$\forall x \in A$, $P(x)$"

El símbolo "$\forall$" = para todo, se llama **CUANTIFICADOR UNIVERSAL.**

Ejemplos: 1) "$\forall y \in I\!R$, $(y-1)^2 \geq 0$" es V

2) "$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(1+n)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$" es V

3) "$(x-1)^2 > 0$, $\forall x \in I\!R$" es F, porque para $x=1$ es $0>0$ que es F.

OTRAS FORMAS DE LEER LA PROPOSICIÓN

"$\forall x \in A \; , \; P(x)$".

son: "Para cada x en A , $P(x)$ "
"cualquiera que sea x en A, $P(x)$"
" $P(x)$, para cada x en A"
" $P(x)$, para todo x en A"

4. $x^2+1<0 \; , \; \forall x \in I\!R$ es F
5. $x^2+1>0 \; , \; \forall x \in I\!R$ es V
6. $e^{-x}>0 \; , \; \forall x \in I\!R$ es V
7. $Ln\, x>0 \; , \; \forall x \in I\!R$ es F
8. $Ln\, x>0 \; , \; \forall x>1$ es V
9. $Ln\, x>0 \; , \; \forall x \leq 1$ es F
10. $Ln\, x<0 \; , \; \forall x \in \langle 0,1 \rangle$ es V

2.7.2 CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Si al enunciado abierto $P(x)$, donde $x \in A$, le anteponemos la frase "**EXISTE** x", obtenemos una proposición de la forma:

"Existe $x \in A$, tal que $P(x)$ es cierta" que se denota por:
"$\exists\, x \in A \,/\, P(x)$ "

El símbolo " $\exists$ " = existe, se llama cuantificador **EXISTENCIAL.**

Ejemplo:
1) $\exists\, x \in I\!N \,/\, 0<x<2$ es V , con $x=1$
2) $\exists\, x \in \mathbb{Z} \,/\, 2x=1$ es F , pues $x=1/2$ no es entero.
3) $\exists\, x \in I\!R \,/ (x^2-1)^2 \leq 0$ es V , con $x=\pm 1$ se cumple la igualdad.

OTRAS FORMAS DE LEER LA PROPOSICIÓN

"$\exists\, x \in A \,/\, P(x)$ "

son: "existe por lo menos un $x \in A$, tal que $P(x)$ es cierta"
"Para algún x en A , $P(x)$"
"$P(x)$, para algún x en A"
"Hay al menos un x en A, tal que $P(x)$"

NOTACIÓN:
La notación " $\exists !$" se lee "**EXISTE UN ÚNICO** .... "

Ejemplos:

1. $P(x)$: "$\exists!\, x \in \mathbb{Z} / 2 < x < 4$" es V porque $x = 3$ es el único número entero que cumple $2 < 3 < 4$.

2. $Q(x)$: "$\exists!\ x \in \mathbb{R} / (x+1)^2 \leq 0$" es V porque $x = -1$ es el único número real tal que cumple $(x+1)^2 \leq 0$.

   Pues: $(-1+1)^2 \leq 0 \iff \underbrace{(-1+1)^2 < 0}_{F} \vee \underbrace{(-1+1)^2 = 0}_{V}$ → V

3. $R(x)$: "$\exists!\ x \in \mathbb{R} / e^{x^2-9} = 1$" es F, porque existen dos valores: $x = \pm 3$.

2.8 NEGACIÓN DE CUANTIFICADORES

Sea $P(x)$ un enunciado abierto, definido en un cierto conjunto A, las proposiciones cuantificadas: "$\forall x, P(x)$" y "$\exists x / P(x)$" se pueden negar obteniéndose otras proposiciones.

Sus respectivas negaciones son:

$$\sim[\forall x, P(x)] \equiv \exists x / \sim P(x)$$
$$\sim[\exists x / P(x)] \equiv \forall x, \sim P(x)$$

Ejemplos:

1) $\sim[\forall n\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,\ n+2 < 5] \equiv \exists n\ ,\ n \in \mathbb{N} / \sim(n+2 < 5)$
$\equiv \exists n\ ,\ n \in \mathbb{N} / n+2 \geq 5$

2) $\sim[\exists x / x^3 = x^2] \equiv \forall x, \sim(x^3 = x^2)$
$\equiv \forall x, x^3 \neq x^2$

3) $\sim[\exists x \in \mathbb{R} / 1 \leq x^2 < 4] \equiv \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sim(1 \leq x^2 < 4)$
$\equiv \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 < 1 \ \vee\ x^2 \geq 4$

4) $\sim[\forall x \in A\ ,\ p(x) \longrightarrow q(x)] \equiv \exists x \in A / p(x) \ \wedge\ \sim q(x)$

2.9 CUANTIFICACIONES CON DOS O MÁS CUANTIFICADORES

Ejemplo 1:

Sea $A=\{0,1,2\}$, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a) P : $\forall x \in A$, $\forall y \in A$, $y^2 \leq 4(x+1)$ .... es V

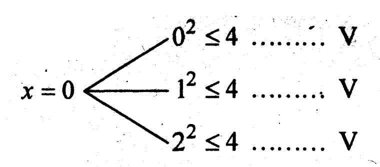
b) Q : $\forall x \in A$, $\exists ! \, y \in A$, $y=\begin{cases} \frac{2|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$ .... es V

c) E : $\exists ! \, x \in A / \forall y \in A$, $(x-1)^2 \leq y$ .... es V

d) F : $\exists ! \, x \in A / \exists ! \, y \in A$, $x^2+y^2=0$ .... es V

Comprobación:

a) $\forall x \in A$, $\forall y \in A : y^2 \leq 4(x+1)$.



Como vemos, la proposición P es **VERDADERO**, porque se cumple $\forall x \in A$ y $\forall y \in A$

$x=1$:
$0^2 \leq 8$ V
$1^2 \leq 8$ V
$2^2 \leq 8$ V

$x=2$:
$0^2 \leq 12$ V
$1^2 \leq 12$ V
$2^2 \leq 12$ V

b) Q es verdadero, porque: $\forall x \in A$, $y=2$ es el único elemento de A que hace verdadero la proposición.

c) E es verdadero, porque $x=1$ es el único elemento que hace verdadero la proposición $\forall\, y \in A$.

d) F es verdadero, porque $x=0$, $y=0$ son los únicos valores que hacen verdadero la proposición.

Ejemplo 2:

Sean $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{-1,0,1\}$, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

e) $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in B, 4x^2+y^2 \leq 17$ .... es V

f) $\forall\, x \in A$, $\exists\, y \in B / 1-\frac{x^2}{4} \leq y^2+1<2$ .... es V

Ejemplo 3: Sean $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{4,2,0,-2\}$, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

g) $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in B, 2x+y=4$ .... es F

h) $\forall\, x \in A$, $\exists\, y \in B / (x-1)^2 > y$ .... es V

i) $\exists\, y \in B / \forall\, x \in A$, $(x-1)^2 > y$ .... es V, basta que cumpla con $y=-2$

En g) si $x=0$, "$y=4$, $\forall\, y \in B$" es F

En h) si $x = \begin{cases} 0 \text{ , "}\exists\, y \in B / 1>y\text{" es V} \\ 1 \text{ , "}\exists\, y \in B / 0>y\text{" es V} \\ 2 \text{ , "}\exists\, y \in B / 1>y\text{" es V} \\ 3 \text{ , "}\exists\, y \in B / 4>y\text{" es V} \end{cases}$

las 4 proposiciones son V, por tanto h es V

En *i)* Si $y=-2$ se tiene "$(x-1)^2>-2$, $\forall\, x \in A$" es V.
Luego , *i)* es V .

NOTA: La proposición $p: (\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq 0)\ ,\ (\exists\, y \in \mathbb{R}) / xy=1$ es V
Mientras que $q: (\exists\, y \in \mathbb{R}) / \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq 0\ ,\ xy=1$ es F

En p tenemos: si $x=2$ $\exists\, y=½$ tal que $xy=1$
En q tenemos: si $y=2$, la igualdad $2x=1$ no se cumple $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

CONSECUENCIA: **NO** son iguales "$\forall x \in A\ ,\ \exists y \in B : P(x,y)$"

y "$\exists y \in B\ ,\ \forall x \in A : P(x,y)$"

porque la jerarquía de los cuantificadores son de izquierda a derecha. Pues los cuantificadores, universal y existencial son operadores monádicos, y como tales sólo operan hacia la derecha.

Ejemplo 4: Negar las proposiciones de los ejemplos 2 y 3.

Solución:

e) $\sim(\forall x \in A\ ,\ \forall\ y \in B\ ,\ 4x^2 + y^2 \leq 17) \equiv \exists x \in A / \sim(\forall y \in B , 4x^2 + y^2 \leq 17)$

$\equiv \exists x \in A /\ \exists y \in B / 4x^2 + y^2 > 17$

f) $\sim\left(\forall x \in A\ ,\ \exists y \in B \Big/ 1 - \frac{x^2}{4} \leq y^2 + 1 < 2\right) \equiv \exists x \in A / \forall y \in B\ ,\ 1 - \frac{x^2}{4} > y^2 + 1$

$\vee\ \ y^2 + 1 \geq 2.$

g) $\sim\left(\forall x \in A\ ,\ \forall y \in B\ ,\ 2x + y = 4\right) \equiv \exists x \in A / \sim(\forall y \in B\ ,\ 2x + y = 4)$

$\equiv \exists x \in A / \exists y \in B / 2x + y \neq 4$

h) $\sim\left(\forall x \in A\ ,\ \exists y \in B \Big/ (x-1)^2 > y\right) \equiv \exists x \in A / \sim(\exists y \in B / (x-1)^2 > y)$

$\equiv \exists x \in A / \forall y \in B\ ,\ (x-1)^2 \leq y$

i) $\sim\left(\exists y \in B \Big/ \forall x \in A\ ,\ (x-1)^2 > y\right) \equiv \forall y \in B , \exists x \in A / (x-1)^2 \leq y$ es F.

OTROS EJEMPLOS SOBRE NEGACIÓN

1) $\sim(\forall x \in A , \exists y \in B / \underbrace{E(x) \rightarrow F(y)}_{\sim E(x)\ \vee\ F(y)}) \equiv \exists x \in A / \forall y \in B , E(x)\ \wedge \sim F(y)$

2) $\sim(\exists x \in A / \exists y \in B / P(x)\ \wedge\ P(y)) \equiv \forall x \in A , \forall y \in B / \sim P(x)\ \vee \sim P(y)$

3) $\sim(\exists x \in A / \forall y \in B\ ,\ E(x)\ \vee\ [\sim F(y)]) \equiv \forall x \in A , \exists y \in B / \sim E(x)\ \wedge\ F(y)$

4) $\sim(\forall y \in B\ ,\ \exists x \in A / y = f(x)) \equiv \exists y \in B / \forall x \in A\ ,\ y \neq f(x)$

5) $\sim(\forall\, \varepsilon>0\ ,\ \exists\, \delta>0\,/\,|x-x_0|<\delta\ \wedge\ x\in D_f \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)\quad \equiv$

$\equiv \exists\, \varepsilon>0\,/\,\forall\, \delta>0\ ,\ \sim\Big(\big(\,|x-x_0|<\delta\ \wedge\ x\in D_f\,\big)\rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\Big)$

$\equiv \exists\, \varepsilon>0\,/\,\forall\, \delta>0\ ,\ (|x-x_0|<\delta\ \wedge\ x\in D_f)\ \wedge\ |f(x)-L|\geq\varepsilon$

6) $\sim(\forall\, x\in A\ ,\ x\in A\rightarrow x\in B)\equiv \exists\, x\in A\,/\,x\in A\ \wedge\ x\notin B$

7) $\quad \sim\{\,[\forall\, x\in A\,,\,P(x)\rightarrow q(x)]\ \vee\ [\exists\, y\in A\,/\,E(y)\rightarrow \sim F(y)]\,\}$

$\equiv\quad \sim[\forall\, x\in A\,,\,P(x)\rightarrow q(x)]\ \wedge\ \sim[\exists\, y\in A\,/\,E(y)\rightarrow \sim F(y)]$

$\equiv\quad [\exists\, x\in A\,/\sim(P(x)\ \rightarrow\ q(x))]\ \wedge\ [\forall\, y\in A\,,\sim(E(y)\rightarrow \sim F(y))]$

$\equiv\quad [\exists\, x\in A\,/\,P(x)\ \wedge\ \sim q(x)]\ \wedge\ [\forall\, y\in A\,,\,E(y)\ \wedge\ F(y)]$

2.10 PROBLEMAS

Formalizar, simplificar y negar las siguientes proposiciones compuestas:

① Si todos los números enteros son pares, entonces hay algún número entero primo si, y solo si, todos los números enteros no son primos; pero cualquier número entero no es primo.

② Cualquier número entero es par y existen números enteros primos, si hay algún entero impar, sí y solo si, hay algún número entero primo o cualquier número entero par, si cada número entero no es primo.

③ Hay algún número entero primo, si todos los números enteros son pares, pero hay algún entero impar. Por tanto, cualquier entero no es primo.

④ Negar las siguientes proposiciones:

$P\equiv \forall\, x\in I\!R\ ,\ \exists\ M\in \mathbb{Z}\,/\,x<M\quad \Rightarrow\quad x^2<M+1$

$q\equiv \forall\, r\in \mathbb{Q}\ ,\ \exists\ n\in \mathbb{Z}\,/\,n\leq r<n+1$

Solución:

① $P\ :\quad \forall\, x\in \mathbb{Z}\ ,\ x$ es par.

$q\ :\quad \exists\, x\in \mathbb{Z}\,/\,x$ es primo.

$[(p\rightarrow q)\ \leftrightarrow\ \sim q]\ \wedge\ \sim q\equiv \sim(p\vee q)$. Su negación es: $p\vee q$

② $[(\sim p\rightarrow (p\wedge q)]\ \leftrightarrow\ [\sim q\rightarrow (q\vee p)]\ \equiv\ p\ \vee\ (\sim q)$

La negación es: $\sim p\ \wedge\ q$

③ $[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to \sim q \equiv p \vee \sim q$. La negación es: $\sim p \wedge q$.

④ Negar las siguientes proposiciones:

$p \equiv \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, M \in \mathbb{Z} \,/\, x < M \longrightarrow x^2 < M+1$

$q \equiv \forall\, r \in \mathbb{Q}\,,\ \exists\, n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq r < n+1$

Solución: $\sim p \equiv \exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, \forall\, M \in \mathbb{Z}\,,\ x < M \ \wedge\ x^2 \geq M+1$

$\sim q \equiv \exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{Z}\,,\ n > r \ \vee\ r \geq n+1$

2.11 SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

Son 4:

1. Universal afirmativo : Todos los x son $p \equiv \forall\, x : P(x)$
2. Universal negativo : Ningún x es $p \equiv \forall\, x : \sim p(x)$
3. Particular afirmativo : Algún x es $p \equiv \exists\, x \,/\, p(x)$
4. Particular negativo : Algún x no es $p \equiv \exists\, x \,/\, \sim p(x)$

Ejemplos:

a) P : Todos los números racionales son impropios $\equiv \forall\, x \in \mathbb{Q}\,,\ x > 1$
$\sim P : \exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x \leq 1$

b) q : Ningún número racional es impropio $\equiv \forall\, x \in \mathbb{Q}\,,\ x \leq 1$
$\sim q : \exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x > 1$

c) r : Algún número racional es propio $\equiv \exists\, x \in \mathbb{Q} \,/\, x < 1$
$\sim r : \forall\, x \in \mathbb{Q}\,, x \geq 1$

d) s : Algún número racional no es propio $\equiv \exists\, x \in \mathbb{Q} / x \geq 1$
$\sim s : \forall\, x \in \mathbb{Q}\,, x < 1$

2.12 CUANTIFICACIÓN DE LAS FORMAS CATEGÓRICAS TÍPICAS DE LA LÓGICA TRADICIONAL

Son 4:

A : Todos los S son $P \equiv \forall\, x\,[S(x) \to P(x)]$
"Para todo x, si x es de S entonces x es de P"

B : Ningún S es $P \equiv \forall\, x\,[S(x) \to \sim P(x)]$
"Para todo x, si x es de S entonces x no es de P"

I : Algunos S son $P \equiv \exists x[S(x) \wedge P(x)]$
"Para algún x, x es de S y x es de P"

O : Algunos S no son $P \equiv \exists x[S(x) \wedge \sim P(x)]$
"Para algún x, x es de S pero no es de P"

2.13 PROBLEMAS

① Determinar el valor de verdad de: p : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\exists y \in \mathbb{Q}$, $x+y=0$
q : $\exists y \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x+y=0$

Solución:

En p : si $x=2$, "$\exists y \in \mathbb{Q} / 2+y=0$" es V
si $x=-\frac{3}{5}$, "$\exists y \in \mathbb{Q} \Big/ -\frac{3}{5}+y=0$" es V
⋮
"Para cualquier $x \in \mathbb{Q}$ existe su opuesto $y=-x$, tal que $x+y=0$"

Por tanto : p es V.

En q : si $y=\frac{1}{2}$, "$x+\frac{1}{2}=0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$" es F

Por tanto : q es F.

② Dados los conjuntos: $A=\{x \in \mathbb{N} / 2x \le 13\}$
$B=\{x \in A / (x^2-2x) \notin A\}$

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p : $\forall x \in (A-B)$, $\exists y \in B / x^2-2x \ge y-3$

q : $\exists x \in B$, $\exists y \in (A-B)$, $\forall z \in B$: $(x+y^2+z) \in A$

r : $\forall x \in (A-B)$: $x^2 \notin A$

Solución:

1. En primer lugar, tabulemos los conjuntos A y B:

$A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{1,4,5,6\}$ y $A-B=\{0,2,3\}$

2. Veamos el valor de verdad de p:

$$\text{Si} \quad (A-B) \ni x = \begin{cases} 0 \;,\; \text{“}\exists\, y \in B \,/\, 0 \geq y-3\text{” es } V \text{ con } y=1 \\ 2 \;,\; \text{“}\exists\, y \in B \,/\, 0 \geq y-3\text{” es } V \text{ con } y=1 \\ 3 \;,\; \text{“}\exists\, y \in B \,/\, 3 \geq y-3\text{” es } V \text{ con } y=4 \end{cases}$$

Entonces p es V.

3. Veamos el valor de verdad de q :

$\exists\, x \in B = \{1,4,5,6\}, \exists\, y \in (A-B) = \{0,2,3\}, \forall\, z \in B = \{1,4,5,6\} : (x+y^2+z) \in A$

si $x=1$, $y=0$; la proposición "$(1+z) \in A, \forall\, z \in B$" es F, falla con $z=6$.

Por tanto: q es F.

4. Veamos el valor de verdad de r :

$$(A-B) \ni x = \begin{cases} 0 : 0^2 \notin A \text{ es F} \\ 2 : 2^2 \notin A \text{ es F} \\ 3 : 3^2 \notin A \text{ es F} \end{cases}$$

Como hay dos proposiciones falsas, es más que suficiente para afirmar que r es F.

③ Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{-2,-1,0,5,6\}$ establecer el valor de verdad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones, justificando debidamente su respuesta.

$p : \forall\, x \in A \,,\, \exists\, y \in B : x+y<3$

$q : \exists!\, y \in B \,,\, \forall\, x \in A : x-y>1$

$r : \forall\, x \in B \,,\, \forall\, y \in A : x<y \Rightarrow x^2<y^2$

$s : \exists\, x \in A \,,\, \exists\, y \in B : (x-y) \in A$

Solución:

1. En P :

$$A \ni x = \begin{cases} 1 : \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < 2\text{” es V} \\ 2 : \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < 1\text{” es V} \\ 3 : \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < 0\text{” es V} \\ 4 : \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < -1\text{” es V} \\ 5 : \text{“}\exists\, y \in B \,/\, y < -2\text{” es F} \end{cases}$$

Luego, $\boxed{P \text{ es } F}$; porque no se cumple para todos los elementos del conjunto A, falla con $x = 5$.

2. En q, probemos $y = -2 \in B$: "$x-(-2) > 1$, $\forall x \in A$" es V

con $y = -1 \in B$: "$x-(-1) > 1$, $\forall x \in A$" es V

Luego, no existe valor único, existe hasta dos.

Por tanto, $\boxed{q \text{ es } F}$

3. En r : bastará que falle una vez para afirmar que r es F.

Vemos: Si $x = -2 \in B \wedge y = 1 \in A$, se tendrá: $-2 < 1 \rightarrow 4 < 1$

V ↘ ↙ F

F

Luego, $\boxed{r \text{ es } F}$

4. En s, si $x = 1 \in A \wedge y = -2$ se tiene "$1-(-2) = 3 \in A$" es V.

Como vemos, basta que se cumpla por lo menos con un solo elemento para A y de B, para afirmar que la proposición es verdadero.

Luego. $\boxed{s \text{ es } V}$

④ Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \leq 50\}$ el conjunto universal y sean p, q y r las proposiciones cuantificadas siguientes:

p : $\forall x \in A$, $\exists y \in A \,/\, x + 2y > x^2$

q : $\forall x \in A$, $\exists y \in A$, $\forall z \in A$: $x + y - z \leq x + y$

r : $\exists x \in A$, $\exists y \in A$, $\forall z \in A$: $x - 2y \geq x + y - z$

Hallar el valor de verdad de: $[(p \rightarrow q) \,\Delta\, (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [q \vee \sim r]$

Solución:

1. Hallemos el valor de p

Se pide: para todo x en A, existe algún $y \in A / x + 2y > x^2$.

Para afirmar que p es V, debe cumplirse para todo $x \in A$. Si falla para algún $x \in A$, será falsa.

Veamos:

La desigualdad $x + 2y > x^2$ es equivalente a:

$$\frac{x(x-1)}{2} < y$$

Si probamos con $x = 50 \in A$ tendremos "$\exists\, y \in A \,/\, \frac{(50)(49)}{2} < y$" es F, porque no existe ningún $y \in A$, tal que $(25)(49) < y$.

Luego; $\boxed{p \text{ es F}}$

2. Hallar el valor de q.

q : Para todo x en A, existe algún y en A, tal que para todo z en A, se cumple: $x + y - z \leq x + y$

Antes de analizar, simplifiquemos: $x + y - z \leq x + y$

$$\iff z \geq 0$$

Así la proposición q se reduce a q: "$z \geq 0$, $\forall\, z \in A$" es V.

Luego: $\boxed{q \text{ es V}}$

3. Hallar el valor de verdad de r

r : Para algún x en A, hay al menos un y en A, tal que:

"$x - 2y \geq x + y - z$, para todo z en A".

En primer lugar debemos simplificar la desigualdad:

$x - 2y \geq x + y - z \iff z \geq 3y$, así r es:

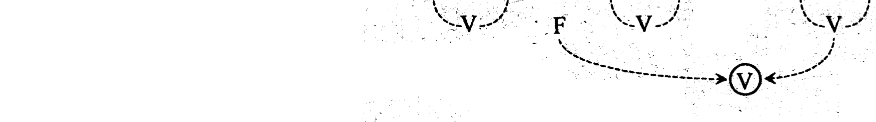
r : "$\exists\, y \in A, \forall\, z \in A : z \geq 3y$"

"hay al menos un $y \in A$, tal que: $z \geq 3y$, para todo z en A"

Con $y = 0$, se cumple "$z \geq 0$, $\forall\, z \in A$"

Luego, $\boxed{r \text{ es V}}$

Finalmente, tabulemos el valor de: $[(p \to q)\ \Delta\ (q \to r)] \to [q \vee \sim r]$



⑤ Dado $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p : $\forall\, x \in U : \exists\, y \in U \ \wedge\ \exists\, z \in U$ tales que $2x - y + z < 10$

q : $\exists\, x \in U$ tal que: $\forall\, z \in U$, $\exists\, y \in U$ tal que $2x - y + z < 10$

Solución:

1. p : "Para cada $x \in U$: hay al menos un $y \in U$ $\wedge$ existe por lo menos un $z \in U$, tales que $2x - y + z < 10$"

Como se pide para todo $x \in U$, en particular escojamos el mínimo y máximo valores de U.

Así:

Si $x = 0$, se tiene la proposición "$\exists\, y \in U$, $\exists\, z \in U / z - y < 10$" que es V para $y = 0 \ \wedge \ z = 0$.

Si $x = 10$, se tiene la proposición "$\exists\, y \in U$, $\exists\, z \in U / 10 + z < y$" que es F, porque no existen valores para $y \wedge z$ pertenecientes a U que hagan verdadero la proposición.

Entonces $\boxed{p \text{ es F}}$

2. q : "Hay al menos un $x \in U$, tal que: para todo $z \in U$, existe algún $y \in U$, tal que $2x - y + z < 10$".

Si $x = 0$, la proposición "$\underbrace{\forall\, z \in U \ , \ \exists\, y \in U / z < 1 + y}_{\text{es V}}$"

Pues, para todo $z \in U$, siempre es posible hallar por lo menos algún $y \in U$, tal que $z < 1 + y$

Con $z = 0$, "$\exists\, y \in U / 0 < 1 + y$" es V con $y = 1, 2, \ldots$

Con $z = 1$, "$\exists\, y \in U / 0 < y$" es V con $y = 1, 2, \ldots$

$\vdots$

Con $z = 10$, "$\exists\, y \in U / 9 < y$" es V con $y = 10$.

Luego, $\boxed{q \text{ es V}}$

(6) Sean las proposiciones p, q y r, dadas por:

p : "$\forall\, y \in I\!N$, $\exists\, x \in I\!N$: $x > y \ \wedge \ x$ es par"

q : "$\exists\, x \in I\!N$, $\forall\, y \in I\!N$: $y < x$"

r : "$\forall\, x \in I\!N$, $\forall\, y \in I\!N$: $x + y > x$"

Deducir y fundamente el valor de verdad de cada una de dichas proposiciones.

Solución:

1. Tener en cuenta que $I\!N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

2. p : " para todo $y \in \mathbb{N}$, hay al menos un $x \in \mathbb{N}$: $x > y \wedge x$ es par "

para $y = 0$, hay $x = 2$ tal que $2 > 0$ es V

para $y = 1$, hay $x = 2$ tal que $2 > 1$ es V

para $y = 2$, hay $x = 4$ tal que $4 > 2$ es V

$\vdots$

para todo $y \in \mathbb{N}$, siempre será posible encontrar algún x par tal que $x > y$.

Luego, $\boxed{p \text{ es V}}$

3. q : "Hay al menos un $x \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $y \in \mathbb{N}$ se cumple: $y < x$ "

Si probamos con $x = 0$, " $y < 0$, $\forall\ y \in \mathbb{N}$ " es F.

No va a ser posible encontrar algún $x \in \mathbb{N}$, tal que " $y < x$, $\forall\ y \in \mathbb{N}$ "

Luego, $\boxed{q \text{ es F}}$

4. r : Al simplificar: " $y > 0$, $\forall\ y \in \mathbb{N}$ " es F, falla con $y = 0$.

Luego, $\boxed{r \text{ es F}}$

2.14 VARIABLE Y CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto de todos los objetos que representa la variable x, en un determinado tema de interés, se llama **EL UNIVERSO** de la variable o **CONJUNTO UNIVERSAL** de la variable.

NOTACIÓN: $U = \{ x / x = x \}$

└─ conjunto universal

Ejemplos:

1) $U = \{ x/x \in I\!N \}$

2) $U = \{ x/x$ es un alumno ingresante en la UNI en 1980 $\}$

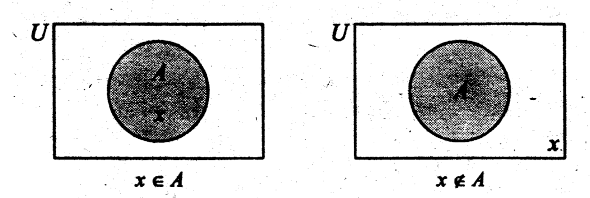
3) $U = \{ x/x$ es un ciudadano hábil para elegir y ser elegido $\}$

4) $U = \{ x/x$ es una persona entre 20 y 25 años de edad $\}$

En matemáticas, son conjuntos universales importantes y básicos:

$I\!N$, Z, $I\!I$, $I\!R$, $I\!R^2$, $I\!R^3$, $I\!R^n$

En un diagrama de Venn, el conjunto universal, se representa por un rectángulo:



$x \in A$ $\qquad$ $x \notin A$

Si x es una variable que representa a un elemento del conjunto universal U y A es un conjunto de elementos referentes al universo U, entonces puede ocurrir uno y sólo uno de las siguientes posibilidades: $x \in A$ o $x \notin A$.

2.14.1 PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN

Si $p(x)$ es una proposición verdadera para $x \in A$ y si $u = x$, entonces $p(u)$ también es verdadera.

Ejemplos:

1) $P(x): \ x^2 < 4$ es verdadera para $-2 < x < 2$, entonces:
   $P(u): \ u^2 < 4$ también es verdadera para $-2 < u < 2$.

2) Sea $A = \{2,4,6,......\}$. si $x \in A$ es verdadero y $u = x$, entonces $u \in A$ también es verdadero.

2.15 CONJUNTO FINITO

Un conjunto es finito, si consta de "*n*" elementos, siendo "*n*" un número natural fijo. $\mathbb{N}$: 0,1,2,3,...

2.16 CONJUNTO INFINITO

Un conjunto es infinito, si no es finito.

2.17 CONJUNTO NUMERABLE

Diremos que un conjunto A es numerable, si y sólo si, **existe una BIYECCIÓN entre los números naturales y los elementos del conjunto** A.

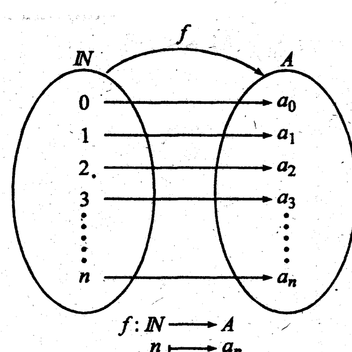
Es decir existe una función **BIYECTIVA** f, tal que, $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$.

NOTA:

En lugar de usar $\mathbb{N}$, también podemos usar los números enteros positivos $(\mathbb{Z}^+)$

DEFINICIÓN

Una función f de A en B es biyectiva si es **inyectiva y suryectiva**.



Si no existe una **BIYECCIÓN** entre los números enteros (o números naturales) y los elementos del conjunto A, entonces diremos que A es **NO NUMERABLE**.

Por ejemplo, los números reales son no numerables.

Ejemplos:

$A = \{2,4,6,8,...\}$ El conjunto A es **INFINITO NUMERABLE**, la biyección existente es: $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

$B = \{1,3,5,7,...\}$ El conjunto B es **INFINITO NUMERABLE**, la función biyectiva existente es: $f(n) = 2n-1$, $n \in \mathbb{Z}$ ó $f(n) = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

$C = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729} \right\}$ El conjunto C es **NUMERABLE FINITO**, la Biyección existente es: $f(n) = \frac{1}{3^n}$, $n = 1,2,......,6$

$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$ El conjunto es infinito **NO NUMERABLE**.

$E = \{1,2,4,8,...\}$ El conjunto E (potencias de 2) es **INFINITO NUMERABLE**, porque existe una función biyectiva, y es: $f(n) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

$F = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 5\}$ El conjunto F es **INFINITO NO NUMERABLE**.

0 ———— 5 Gráficamente el conjunto F es un segmento de recta de longitud 5 unidades.

EJERCICIOS

Decir, cuál de los siguientes conjuntos son finitos, infinitos, numerables o no numerables o vacío.

$A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, (x+1)(2x-1) = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x+1)(2x-1) = 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 4 = 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 = 0\}$

$E = \{x \in \mathbb{C} \,/\, x^2 + 4 = 0\}$

$F = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x > 5\}$

$G = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 5\}$

$H = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^2 \leq 16\}$

$I = \left\{ \frac{1}{n} \,/\, 1 < n < 5 \,,\, n \in \mathbb{Z} \right\}$

$J = \{x \in \mathbb{N} \,/\, (x+1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0\}$

$K = \{1, 5, 25, 125, \ldots\}$

$L = \{1, b, b^2, b^3, \ldots\}$

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$

$N = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\}$

$O = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{17}, \ldots \right\}$

$P = \{x \in \mathbb{R}^+ \,/\, 1 - \cos x = 0\}$

$Q = \{x \in \mathbb{R}^+ \,/\, \operatorname{sen} x = 0\}$

$R = \{x \in \mathbb{R}^+ \,/\, 1 + \operatorname{sen} x = 0\}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 - \cos^2 x = 0\}$

$T = \{y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2 \ldots\}$

$U = \{-11, -9, -7, -5, -3, -1\}$

$V = \{f_1, 2f_2, 3f_3, 4f_4, \ldots\}$

$W = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \ldots \right\}$

$X = \left\{ \frac{2}{6}, \frac{4}{11}, \frac{6}{16}, \frac{8}{21}, \frac{10}{26}, \frac{12}{31} \right\}$

$Y = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{26}, \frac{1}{80}, \ldots\ldots \right\}$

$Z = \{-2, 5, -8, 11, \ldots\ldots\}$

2.18 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

La relación de conjunto a conjunto puede ser de inclusión o de igualdad. Es decir, dado dos conjuntos A y B incluidos en un cierto universo, pueden ocurrir que: $A \subset B$ (A está incluido en B), $B \subset A$ (B está incluido en A), $A = B$ (A es igual a B)

2.18.1 SUBCONJUNTOS

Definición:

	$A \subset B \iff (\forall x)/x \in A \Rightarrow x \in B$
Su negación	$A \not\subset B \iff (\exists x)/x \in A \wedge x \notin B$

A esta contenido en B.
A es subconjunto de B.
A es parte de B.

La notación $A \subset B$, se lee: "A está incluido en B" si, y solo si para todo x, tal que, x pertenece a A, implica que x pertenece a B".

Es decir: $A \subset B$ si, y sólo si todo elemento de A está también en B.

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{2,4,6,8\}$

$B = \{2,4,6,8,10,12\}$

$M = \{a,b,c,d,e\}$

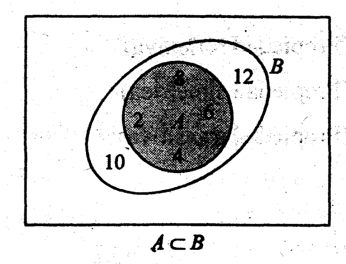
$N = \{b,c,d,m,n\}$

Entonces, podemos afirmar que:

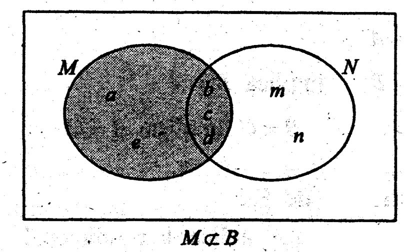
(*i*) $A \subset B$, porque todos los elementos de A están en B.

(*ii*) $M \not\subset N$, porque no todos los elementos de M están en N.

Representación de (*i*) y (*ii*) usando **DIAGRAMA DE VENN-EULER**



$A \subset B$



$M \not\subset B$

2.18.2 SUBCONJUNTO PROPIO

Diremos que A es **SUBCONJUNTO PROPIO** de B, si: $A \subset B \quad \wedge \quad A \neq B$

La notación $\underset{\neq}{A \subset B}$ se lee: "*A* es ***subconjunto propio*** de *B*"

ó "*A* es ***una parte propia*** de *B*"

2.18.3 PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

Si A, B y D son conjuntos arbitrarios, entonces las propiedades de la inclusión son:

(P_1) $A \subset A$ **(P. REFLEXIVA)**

(P_2) Si $A \subset B \;\wedge\; B \subset D \Rightarrow A \subset D$ **(P. TRANSITIVA)**

(P_3) Si $A \subset B \;\wedge\; B \subset A \Rightarrow A = B$ **(P. ANTISIMÉTRICA)**

(P_4) $\forall A$, $\phi \subset A$ el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

(P_5) Es verdadero: $\phi \in \mathcal{P}(A) \;\wedge\; \phi \subset \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

2.19 IGUALDAD DE CONJUNTOS

Axioma de extensión: "dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos".

Notación: $\boxed{A = B \iff [A \subset B \;\wedge\; B \subset A]}$

Se lee: "El conjunto A es igual al conjunto B, si y solo si A está contenido en B y B está contenido en A".

2.19.1 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE CONJUNTOS

(P_1): $A = A$ (Propiedad reflexiva)

(P_2): $A = B$ implica $B = A$ (Propiedad simétrica)

(P_3): $A = B \wedge B = C$ implica $A = C$ (Propiedad transitiva)

Demostración de P_1.

Haciendo $p: x \in A$, aplicar la condicional $p \longrightarrow p$, $\forall\, x \in A$.

Demostración de P_2.

Hacer $p: x \in A$, $q: x \in B$, $r: x \in C$.

Aplicar la definición de inclusión y la propiedad transitiva.

2.20 AXIOMA DE ESPECIFICACIÓN: Construcción de nuevos conjuntos

A partir del conjunto universo U, se construyen nuevos conjuntos a partir del axioma de especificación.

> Dado un conjunto U y una proposición $P(x)$ sobre $x \in U$, existe un único subconjunto $A \subset U$, cuyos elementos son todos los $x \in U$, tales que $P(x)$ es verdadera.
>
> Esto es $A = \{x \in U \,/\, P(x)$ es verdadero$\}$

Ejemplos:

$$A = \{\, \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{x \in \mathbb{Z}} \,/\, \underbrace{-3 < x < 2}_{P(x)} \,\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

2.20.1 CONJUNTO VACÍO

Se llama conjunto vacío o conjunto nulo de U, denotado por $\varnothing$, al siguiente

$$\varnothing = \{x \in U \,/\, x \neq x\}$$

└── se lee "x diferente de x".

Ejemplos: $\{x \in \mathbb{Z} / x^2 + 4 = 0\} = \varnothing$

$\{x \in I\!N / 1 < x < 2\} = \varnothing$

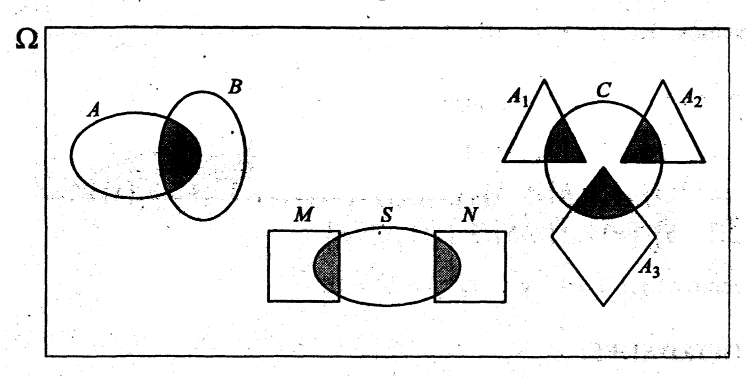
2.20.2 CONJUNTO UNITARIO

Definición.- Sea U un conjunto no vacío, y sea $a \in U$. Si $P(x)$ es la proposición dada por la expresión "$x = a$", entonces por el axioma de especificación, existe y es único el conjunto $\{x \in U / x = a\}$. Este conjunto se denota por $\{a\}$ y se llama **CONJUNTO UNITARIO.**

Se tiena así que: $\{a\} = \{x \in U / x = a\}$

2.21 DIAGRAMA DE VENN - EULER

Consiste en representar el conjunto universal mediante un rectángulo y los otros conjuntos mediante círculos o cualquier figura plana.



2.22 CONJUNTO POTENCIA DE UN CONJUNTO
(Ó CONJUNTO DE LAS PARTES DE UN CONJUNTO)

Definición.- Dado un conjunto A, definimos el **CONJUNTO POTENCIA DE** A, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Notación: El conjunto potencia de A se denota por $\mathcal{P}(A)$ o por 2^A.

Donde la notación: $\mathcal{P}(A)$ o 2^A se lee:

"el conjunto potencia de A o El conjunto de partes de A".

Definición simbólica: $\boxed{\mathcal{P}(A)=\{X/X\subseteq A\}}$

Se lee "El conjunto potencia de A, es igual, al conjunto de los elementos X, tales que, los X son subconjuntos de A.

Por lo tanto: $\boxed{X\in\mathcal{P}(A)\iff X\subseteq A}$

Además, si el número de elementos de A es k, $k\in\mathbb{N}$ el número de elementos de 2^A es 2^k

Ejemplos:

1) Si $A=\{1,2\}$, entonces $2^A=\{\{1\},\{2\},A,\phi\}$

Como vemos $n(A)=2$ y $n(2^A)=2^2=4$

2) Si $B=\{a,\{1,b\},c\}$, entonces:

$$2^B=\{\{a\},\{\{1,b\}\},\{c\},\{a,\{1,b\}\},\{a,c\},\{\{1,b\},c\},B,\phi\}$$

Como vemos: $n(B)=3$ y $n(2^B)=2^3=8$

3) $C=\{2,\{a,b\},3,\{x\}\}$, entonces:

$$2^C=\{\{2\},\{\{a,b\}\},\{3\},\{\{x\}\},\{2,\{a,b\}\},\{2,3\},\{2,\{x\}\}$$
$$\{\{a,b\},3\},\{\{a,b\},\{x\}\},\{3,\{x\}\},\{2,\{a,b\},3\},\{2,3,\{x\}\},$$
$$\{2,\{a,b\},\{x\}\},\{\{a,b\},3,\{x\}\},C,\phi\}$$

Como vemos: $n(C)=4$ y $n(2^C)=2^4=16$

2.22.1 PROPIEDADES:

Para cualquier conjunto A, se cumple:

(P_1) $a\in A\iff\{a\}\in\mathcal{P}(A)$

(P_2) $B\subset A\iff B\in\mathcal{P}(A)$

(P_3) $\phi\in\mathcal{P}(A)\ \wedge\ A\in\mathcal{P}(A)$

(P_4) $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$

(P_5) $A\subset B\iff\mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)$

(P_6) $A=B\iff\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$

TEOREMA 1. $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$

TEOREMA 2. $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cup B)$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos son: La unión de conjuntos, la intersección de conjuntos y la diferencia de conjuntos.

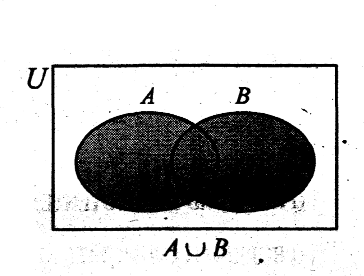
2.23 UNIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, definimos la unión de A con B, como el conjunto:

$$A \cup B = \{x / x \in A \quad \vee \quad x \in B\}$$

Por lo tanto : $x \in (A \cup B) \iff x \in A \;\vee\; x \in B$
su negación : $x \notin (A \cup B) \iff x \notin A \;\wedge\; x \notin B$

se lee: "x perteneciente a la unión de A con B, es equivalente a que x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B".



$A \cup B$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

si $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B$

si $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

El conjunto $A \cup B$ contiene todo A y todo B.

Ejemplo aclaratorio:

Consideremos $\Omega = \mathbb{Z}$ y sean los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 3x + 2 = 0\} \;\;;\;\; B = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 = 4x\} \;\text{ y }\; C = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 4\}$$

Hallar: (i) $A \cup B$, (ii) $B \cup C$, (iii) $A \cup B \cup C$

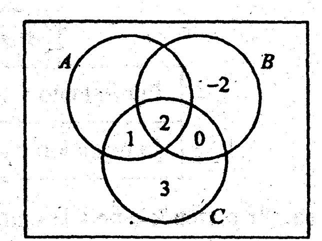
Solución:

En primer lugar, expresemos los conjuntos A, B y C por extensión:

$A=\{2,1\}$ pues: $x^2-3x+2=0 \iff (x-2)(x-1)=0$
$\iff x=2\in \mathbb{Z} \ \vee \ x=1\in \mathbb{Z}$

$B=\{0,2,-2\}$ pues: $x^3=4x \iff x^3-4x=0$
$\iff x(x^2-4)=0 \iff x(x-2)(x+2)=0$
$\iff x=0\in \mathbb{Z} \ \vee \ x=2\in \mathbb{Z} \ \vee \ x=-2\in \mathbb{Z}$

$C=\{0,1,2,3\}$



Por lo tanto: *i)* $A\cup B=\{2,1,0,-2\}$

ii) $B\cup C=\{0,2,-2,1,3\}$

ii) $A\cup B\cup C=\{2,1,0,-2,3\}$

2.23.1 PROPIEDADES DE LA UNIÓN

P_1) $A\cup\phi=A$

P_2) $A\cup\Omega=\Omega$ $\quad\Omega$: Conjunto universal

P_3) $A\cup A=A$ (PROPIEDAD IDEMPOTENTE)

P_4) $A\cup B=B\cup A$ (PROPIEDAD CONMUTATIVA)

P_5) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (PROPIEDAD ASOCIATIVA)

P_6) $\left.\begin{array}{l} A\subset A\cup B \\ B\subset A\cup B \end{array}\right\} \ \forall\, A \ y \ B$

P_7) $A\subset B \iff A\cup B=B$

P_8) $A\cup(B\cup C)=(\underline{A\cup} B)\cup(\underline{A\cup} C)$ (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

P_9) Si $A\cup B=\phi \Rightarrow A=\phi \ \wedge \ B=\phi$

P_{10}) Si $A\subset B \Rightarrow (A\cup C)\subset(B\cup C)$, $\forall\, C$ (PROPIEDAD MONÓTONA)

DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPIEDADES:

(P3) Demostrar que: $A \cup A = A$

***Demostración*:**

Para demostrar la igualdad: $A \cup A = A$, debo demostrar que:

$$\underbrace{\boxed{A \cup A \subset A}}_{\text{(I)}} \quad \wedge \quad \underbrace{\boxed{A \subset A \cup A}}_{\text{(II)}}$$

Demostración de (I):

Para demostrar que $A \cup A$, debo probar que si $x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A$

Veamos:

1) Supongamos que $x \in (A \cup A)$ (hipótesis)

2) $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in A}_{p}$ (definición de unión)

3) Por una tautología que dice: $p \vee p \Longleftrightarrow p$, podemos afirmar de (2) que:

$$\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p}$$

4) Por tanto: por (1) y (3), tenemos que: $A \cup A \subset A$

Demostración de (II):

Para probar que $A \subset A \cup A$, debo demostrar que, si $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)$

Veamos:

5) Si $\underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow (\underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in A}_{p})$ (Por la tautología $p \Leftrightarrow p \vee p$)

6) Luego: $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup A)$ (Por def. de UNIÓN)

7) Por (5) y (6) se cumple que: $A \subset A \cup A$

8) Finalmente por (4) y (7) se cumple que: $A \cup A = A$

(P4) Demostrar que: $A \cup B = B \cup A$ .... **PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA UNIÓN**

***Demostración*:**

Tengo que demostrar que: $A \cup B \subset B \cup A \quad \wedge \quad B \cup A \subset A \cup B$

Veamos:

1) Supongamos que $x \in (A \cup B)$

2) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}$ (Def. de UNIÓN)

3) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in B}_{q} \vee \underbrace{x \in A}_{p}$ (Por tautología $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$).

4) $\Rightarrow \quad x \in (B \cup A)$ (Def. de UNIÓN)

5) Por (1) y (4) se cumple que: $A \cup B \subset B \cup A$ (INCLUSIÓN)

Ahora debo demostrar que: $B \cup A \subset A \cup B$

Veamos:

6) Supongamos que: $x \in (B \cup A)$ (Hipótesis)

7) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in B}_{q} \vee \underbrace{x \in A}_{p}$ (Def. de UNIÓN)

8) $\Rightarrow \quad \underbrace{x \in A}_{p} \vee \underbrace{x \in B}_{q}$ (Pues: $q \vee p \Longleftrightarrow p \vee q$)

9) $\Rightarrow \quad x \in (A \cup B)$ (Def. de UNIÓN)

10) Por lo tanto: $B \cup A \subset A \cup B$ (Por (6), (9) y Def. de INCLUSIÓN)

11) Por (5) y por (10) se cumple que: $A \cup B = B \cup A$

(P$_6$) Demostrar que: $A \subset A \cup B$, $\forall A, B$

***Demostración*:**

1) Supongamos que $x \in A$, donde $p: x \in A$ (Hipótesis)

2) Aplicar la tautología $p \Rightarrow p \vee q$, $\forall q$

3) Como la tautología se cumple $\forall q$, en particular se cumplirá

Si hacemos $q: x \in B$, entonces $p \Rightarrow p \vee q$ será:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

4) $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$

5) Luego, por el paso (4) se tendrá: $A \subset A \cup B$

(P$_7$) Demostrar que: $\underbrace{A \subset B}_{p} \Longleftrightarrow \underbrace{A \cup B = B}_{q}$

***Demostración*:**

Una doble implicación $p \Leftrightarrow q$ se demuestra con dos implicaciones:

<u>**Primero**</u>, se demuestra la "**IMPLICACIÓN DE IDA**" ($p \Rightarrow q$), llamada **CONDICIÓN SUFICIENTE para** q, si p es fijo.

<u>**Segundo**</u>, se demuestra la "**IMPLICACIÓN DE VENIDA**" ($q \Rightarrow p$) llamada **CONDICIÓN NECESARIA para** q.

Así establecemos que la doble implicación "$p \Leftrightarrow q$", es una **CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE.**

DEMOSTRACIÓN DE LA CONDICIÓN SUFICIENTE PARA q ($p \Rightarrow q$)

Debo demostrar que, si $\underbrace{A \subset B}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \cup B = B}_{\text{Tesis}}$

Ahora, para demostrar que $A \cup B = B$, debo probar que $A \cup B \subset B \;\wedge\; B \subset A \cup B$, sabiendo por hipótesis que $A \subset B$.

Veamos: Por demostrar que: $A \cup B \subset B$

1) Sea $x \in (A \cup B)$ .... (Hipótesis)

2) $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p_1} \vee \underbrace{x \in B}_{q_1}$ .... (Def. de UNIÓN)

3) Pero: $A \subset B$ .... (Hipótesis)

   Luego: Si $\underbrace{x \in A}_{p_1} \rightarrow \underbrace{x \in B}_{q_1}$, $\forall x \in A$

4) Por (2), (3) y usando la tautología: $(p_1 \rightarrow q_1) \longleftrightarrow (p_1 \vee q_1 \rightarrow q_1)$

   Tendremos: $(\underbrace{x \in A}_{p_1} \vee \underbrace{x \in B}_{q_1}) \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{q_1}$

5) Entonces: $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in B$, $\forall x \in (A \cup B)$

6) Por lo tanto: $(A \cup B) \subset B$ .... (Paso (5) y Definición de $\subset$)

Ahora, demostraré que: $B \subset A \cup B$

7) La proposición: " $B \subset A \cup B$ ", es verdadero: lo he demostrado en el ejercicio (P_6) de la página anterior.

8) En consecuencia, por los pasos 6 y 7 queda demostrado que: $A \cup B = B$, siempre y cuando $A \subset B$.

DEMOSTRACIÓN DE LA CONDICIÓN NECESARIA PARA q $(p \Leftarrow q)$

Por demostrar que si $\underbrace{A \cup B = B}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \subset B}_{\text{Tesis}}$

Se lee "si A unido con B es igual a B entonces A está incluido en B"

9) Supongamos que $(\forall x)$; $x \in A$ .... (Hipótesis)

10) Usando la tautología: $p_1 \Rightarrow p_1 \vee q_1$ y

haciendo p_1 : $x \in A$ y q_1 : $x \in B$, tenemos:

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

11) $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$ .... (Definición de **UNIÓN**)

12) Por hipótesis, tenemos que: $A \cup B = B$, y si reemplazamos (12) en (11), se tendrá:

$x \in A \Rightarrow x \in B$, $\forall x \in A$

13) Esto implica que: $A \subset B$ .... (Definición de **INCLUSIÓN**)

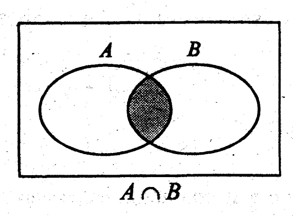
14) Conclusión: Por los pasos 8 y 13, se cumple: $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

2.24 INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Definición: Dado dos conjuntos, definimos la intersección de A y B, como el conjunto:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Por lo tanto:	$x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$
La negación:	$x \notin (A \cap B) \Longleftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$



$A \cap B$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

si $x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

si $x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

Como vemos: el conjunto "$A \cap B$" contiene sólo los **elementos comunes** de A y B.

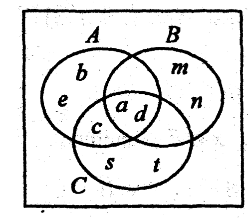
Ejemplo 1:

Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{m, n, a, d\}$, $C = \{s, a, t, c, d\}$

Hallar: (1) $A \cap B$, (2) $B \cap C$ (3) $A \cap B \cap C$ (4) $A \cap C$

Solución:

1) $A \cap B = \{a, d\}$
2) $B \cap C = \{a, d\}$
3) $A \cap B \cap C = \{a, d\}$
4) $A \cap C = \{a, c, d\}$



NOTA: Para hacer un diagrama de Venn; primero, se ubican los elementos de $A \cap B \cap C$; segundo, se ubican los elementos de $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$; se termina completando los elementos de *A*, *B* y *C*.

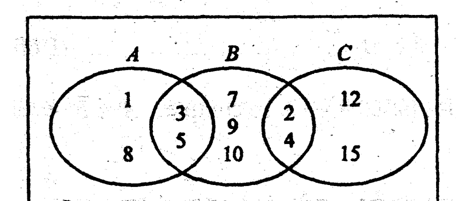
Ejemplo 2:

Sean los conjuntos: $A = \{1,3,5,8\}$, $B = \{2,3,4,5,7,9,10\}$, $C = \{2,4,12,15\}$

Hallar: (1) $A \cap B$ (2) $B \cap C$ (3) $A \cap B \cap C$

Solución:

1) $A \cap B = \{3,5\}$
2) $B \cap C = \{2,4\}$
3) $A \cap B \cap C = \phi$



2.24.1 PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

P_1) $A \cap \phi = \phi$ "Cualquier conjunto *A*, intersectado con el conjunto vació, es igual, al conjunto vacío".

P_2) $A \cap \Omega = A$ "Cualquier conjunto *A*, intersectado con el conjunto universal, es igual, al conjunto *A*".

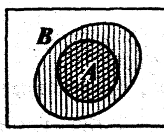
P_3) $A \cap A = A$ "Todo conjunto intersectado consigo mismo, es el mismo conjunto".

P_4) $A \cap B = B \cap A$ "La intersección es conmutativa".

P_5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ "La intersección es asociativa".

P_6) $\left.\begin{array}{r} A \cap B \subset A \\ y \quad A \cap B \subset B \end{array}\right\} \forall\, A, B$ "Toda intersección de dos o más conjuntos, están contenidos en cualquier conjunto de la intersección".

P_7) $A \subset B \iff A \cap B = A$



P_8) Si $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C \ , \ \forall C$

P_9) Si $[A \subset C \wedge B \subset D] \Rightarrow A \cap B \subset C \cap D$

Probar P_3 $\quad A \cap A = A$

($\subset$) Por probar: $A \cap A \subset A$

Veamos:

1. Suponer: $\forall x \in (A \cap A)$ (hipótesis)
2. $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in A}_{p}$
3. Por tautología: $p \wedge p \Longleftrightarrow p$ hacemos
4. $(x \in A \wedge x \in A) \Rightarrow x \in A$
5. Por 1 y 4. $\quad A \cap A \subset A$

   ($\supset$) Por probar: $A \subset A \cap A$

6. $\forall \underbrace{x \in A}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in A}_{p}$ (Tautología)
7. $\Rightarrow x \in (A \cap A)$
8. Por 6 y 7: $A \subset A \cap A$
9. Por 5 y 8: $A \cap A = A$

Probar P_6 $\quad A \cap B \subset A$

1. $\forall x \in (A \cap B)$
2. $\Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}$
3. $[\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}] \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p}$ (Tautología)
4. Por 1 y 3 : $A \cap B \subset A$

Probar P_8

Si $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C , \forall C$

1. **Suponer:** $\forall x \in (A \cap C)$
2. $\Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in A}} \wedge x \in C$
3. **Como $A \subset B$ entonces:**
   $\forall x \in A \Rightarrow \underline{\underline{x \in B}}$
4. 3 en 2: $\quad x \in B \wedge x \in C$
5. $\Rightarrow \quad x \in (B \cap C)$
6. Por 1 y 5: $A \cap C \subset B \cap C$

Probar P_9

Si
$[A \subset C \wedge B \subset D] \Rightarrow [A \cap B \subset C \cap D]$

1. $\forall x \in (A \cap B)$
2. $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$
3. Pero: $A \subset C$, entonces
   $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$
4. Como: $B \subset D$, entonces
   $\forall x \in B \Rightarrow x \in D$
5. 3 y 4 en 2 $\Rightarrow x \in C \wedge x \in D$
6. $\Rightarrow x \in (C \cap D)$
7. Por 1 y 6 : $A \cap B \subset C \cap D$

2.24.2 PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS DE LA UNIÓN O INTERSECCIÓN

(D_1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedad Distributiva de la **INTERSECCIÓN** con respecto a la **UNIÓN**.

(D_2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Propiedad Distributiva de la **UNIÓN** con respecto a la **INTERSECCIÓN**.

2.24.3 LEYES DE ABSORCIÓN

(A_1) $A \cap (A \cup B) = A$

(A_2) $A \cup (A \cap B) = A$

2.25 DIFERENCIA DE DOS CONJUNTOS

Definición: Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal. Definimos la diferencia entre A y B (en este orden), denotado por $A - B$, al conjunto:

$$\boxed{A - B = \{x \in \Omega / x \in A \ \wedge \ x \notin B\}}$$

Se lee: "El conjunto A menos B, es igual al conjunto de los elementos x, tales que, x pertenece al conjunto A y x no pertenece al conjunto B".

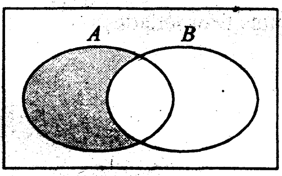
Por lo tanto: $x \in (A - B) \iff (x \in A \ \wedge \ x \notin B)$
$\iff (x \in A \ \wedge \ x \in B')$
$\iff x \in (A \cap B')$

En consecuencia: $\boxed{A - B = A \cap B'}$, B': complemento de B

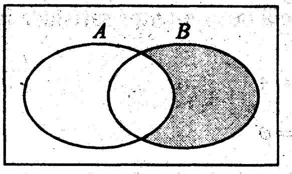
El conjunto $(A - B) \subset \Omega$, se caracteriza por la siguiente propiedad:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in (A - B) \iff x \in A \wedge x \notin B \\ \sim[x \in (A - B)] \iff x \notin (A - B) \iff x \notin A \vee x \in B \end{array}}$$

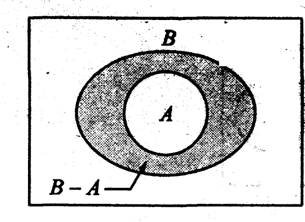
Diagrama de Venn-Euler para la diferencia de dos conjuntos:



$A - B = A \cap B'$



$B - A = B \cap A'$



$A \subset B \iff A - B = \phi$

$A \subset B \iff A \cap B' = \phi$

Propiedad importante muy útil para demostrar inclusiones.

Ejemplos:

1) $\{\underline{a},b,\underline{c},m,n\} - \{p,q,\underline{a},r,\underline{c},t\} = \{b,m,n\}$

2) $\{\underline{4},6,8,10\} - \{1,2,3,\underline{4},5\} = \{6,8,10\}$

3) Supongamos que: $A = \{4n / n \in \mathbb{Z}^+\}$ y $B = \{2n / n \in \mathbb{Z}^+\}$,

entonces: *i)* $A - B = \phi$

ii) $B - A = \{2,6,10,14,18,22,......\}$

4) Sean los conjuntos: $A = \{1,\underline{2},5,8,\underline{9},10\}$ y $B = \{-1,\underline{2},7,\underline{9},12\}$

entonces: *i)* $A - B = \{1,5,8,10\}$

ii) $B - A = \{-1,7,12\}$

2.25.1 PROPIEDADES

La diferencia de conjuntos satisface las siguientes propiedades:

P_1) $A-\phi=A$

P_2) $A-A=\phi$

P_3) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

P_4) $\phi-A=\phi$

P_5) $(A-B)\subset A$

P_6) Si $A\subset B \Rightarrow (A-C)\subset(B-C)$, $\forall C$

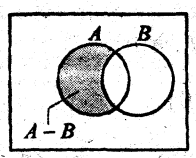
P_7) $A\subset B \iff \underbrace{A-B}=\phi$

$\iff A\cap B'=\phi$

P_8) $B\cap(A-B)=\phi$

P_9) $A-B=(A\cup B)-B$

$= A-(A\cap B)$



Prueba de P_3

Por probarse dos inclusiones:

$$(A\cap B)-(A\cap C)\subset A\cap(B-C) \;\wedge\; A\cap(B-C)\subset(A\cap B)-(A\cap C)$$

Probemos que: $[(A\cap B)-(A\cap C)]\subset A\cap(B-C)$

1. $\forall\; x\in[(A\cap B)-(A\cap C)]$

2. $\Rightarrow x\in(A\cap B) \quad \wedge \quad x\notin(A\cap C)$

3. $\Rightarrow x\in(A\cap B) \quad \wedge \quad [x\notin A \vee x\notin C]$

4. $\Rightarrow x\in(A\cap B) \quad \wedge \quad [x\in A' \vee x\in C']$

5. $\Rightarrow \quad [x\in(A\cap B) \wedge x\in A'] \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\in C']$

6. $\Rightarrow \quad [\underline{x\in A} \wedge x\in B \wedge \underline{x\in A'}] \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\in C']$

7. $\Rightarrow [\underline{x\in B} \wedge \underbrace{(x\in A \wedge \underline{x\in A'})}_{F}] \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\in C']$

F

8. $\Rightarrow \qquad x\in(A\cap B) \wedge x\in C'$

9. $\Rightarrow \qquad x\in A \wedge [x\in B \wedge x\in C']$

10. $\Rightarrow \qquad x\in A \wedge [x\in(B-C)]$

11. $\Rightarrow \qquad x\in[A\cap(B-C)]$

12. $\Rightarrow$ Por 1 y 11. $[(A\cap B)-(A\cap C)]\subset A\cap(B-C)$

Ahora probemos que: $\quad A\cap(B-C)\subset(A\cap B)-(A\cap C)$

13. $\forall\, x\in[A\cap(B-C)]$ .... (hip.)

14. $\Rightarrow x\in A \quad \wedge \quad x\in(B-C)$

15. $x\in A \quad \wedge \quad [x\in B \wedge x\notin C]$

16. $[x\in A \wedge x\in B] \quad \wedge \quad x\notin C$

17. $x\in(A\cap B) \quad \wedge \quad x\notin C$

Aplicar la tautología: $F\vee p\equiv p$, en particular para $F\equiv x\in A \wedge x\notin A$

18. $\underbrace{\qquad F \qquad} \vee \overbrace{[x\in(A\cap B) \wedge x\in C']}^{P}$

19. $[x\in A \wedge x\notin A] \quad \vee \quad [x\in(A\cap B) \wedge x\in C']$, aplicar: $q\wedge F\equiv F$ siendo $q: x\in B$

20. $(\overbrace{x\in B}^{q} \wedge \overbrace{[x\in A \wedge x\notin A]}^{F}) \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\in C']$

21. $([x\in A \wedge x\in B] \wedge x\in A') \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\in C']$

22. $[x \in \underline{(A \cap B)} \quad \wedge \quad x \in A'] \;\vee\; [x \in \underline{(A \cap B)} \;\wedge\; x \in C']$

23. $x \in \underline{(A \cap B)} \quad \wedge \quad [x \in A' \vee x \in C']$ Propiedad distributiva.

24. $x \in (A \cap B) \quad \wedge \quad [x \notin A \vee x \notin C]$

25. $x \in (A \cap B) \quad \wedge \quad x \notin (A \cap C)$

26. $x \in [(A \cap B) - (A \cap C)]$

27. Por 13 y 26 $[A \cap (B - C)] \subset [(A \cap B) - (A \cap C)]$

$\therefore$ Por 12 y 27 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Prueba de P_7 $\quad A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B' = \phi$

$(\Rightarrow)$ Si $A \subset B$ implica $A \cap B' = \phi$.

Prueba:

Teniendo como hipótesis $A \subset B$, deseamos saber cómo es $A \cap B'$.

Veamos:

1. Por hipótesis: $A \subset B$
2. Si $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ ...... P_7 de $\cap$
3. Reemplazar $A = A \cap B$ en $A \cap B'$, así, obtendremos:

$$A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}$$
$$= A \cap \phi = \phi$$
$$\Rightarrow A \cap B' = \phi$$

4. He demostrado que: $A \subset B$ implica $A \subset B' = \phi$

$(\Leftarrow)$ Si $A \cap B' = \phi$ implica $A \subset B$

Si pruebo que $A \cap B = A$ implica $A \subset B$

Veamos:

5. Por hipótesis: $A \cap B' = \phi$

6. Pero: $A \cap B = (A \cap B) \cup \phi$ .... P_1 de unión.

7. 5 en 6 $A \cap B = (A \cap B) \cup \overbrace{(A \cap B')}^{\phi}$

$$= A \cap \overbrace{(B \cup B')}^{\Omega}$$
$$= A \cap \Omega = A$$
$$A \cap B = A$$

8. Si $A \cap B = A$ implica $A \subset B$, que es la P_7 de la intersección.

Por tanto, por 1, 4, 5, 8, concluimos: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B' = \phi$.

Prueba de P_6 $\quad$ Si $A \subset B \Rightarrow (A - C) \subset (B - C)$, $\forall C$.

1. Por hipótesis: $A \subset B$.
2. Debo probar: Si $x \in (A - C)$ implica que $x \in (B - C)$

Veamos:

3. Si $x \in (A-C) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$
4. Como: $A \subset B \Rightarrow x \in B \wedge x \notin C, \forall x \in A$
5. $\Rightarrow x \in (B-C)$
6. Por 3 y 5 se cumple: $A-C \subset B-C$

Prueba de P_8 $\quad B \cap (A-B) = \phi$

Veamos:

1. $B \cap (A-B) = B \cap (A \cap B')$
2. $= B \cap (B' \cap A)$
3. $= \underbrace{(B \cap B')}_{\phi} \cap A$
4. $= \phi \cap A$
5. $= \phi$

Por elementos:

1. $\forall x \in [B \cap (A-B)]$
2. $\Rightarrow x \in B \wedge x \in (A-B)$
3. $\Rightarrow x \in B \wedge [x \in A \wedge x \notin B]$
4. $\Rightarrow x \in B \wedge [x \notin B \wedge x \in A]$
5. $\Rightarrow \underbrace{\underbrace{[x \in B \wedge x \notin B]}_{F} \wedge x \in A}_{F}$
6. $\Rightarrow B \cap (A-B) = \phi$

Prueba de P_9 $\quad A-B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$. Probar: $A-B = (A \cup B) - B$

($\supset$) Por demostrar que:
$[(A \cup B) - B] \subset (A-B)$

1. De $(A \cup B) - B$
2. $\forall x \in [(A \cup B) - B]$
3. $\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin B$
4. $\Rightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge x \notin B$
5. $\Rightarrow [x \in A \wedge x \notin B] \vee \underbrace{[x \in B \wedge x \notin B]}_{F}$
6. $\Rightarrow x \in (A-B)$
7. Luego: $(A \cup B) - B \subset A - B$, por 1 y 6

   Por demostrar: $A - B \subset (A \cup B) - B$
   (queda como ejercicio)
   Demostrando las dos inclusiones queda probado la igualdad.

Probar: $A - (A \cap B) = A - B$

($\subset$)

1. $\forall x \in [A - (A \cap B)]$
2. $x \in A \wedge x \notin (A \cap B)$
3. $x \in A \wedge [x \notin A \vee x \notin B]$
4. $\underbrace{[x \in A \wedge x \notin A]}_{} \vee [x \in A \wedge x \notin B]$
5. $\underbrace{\quad F \quad}$
6. $\underbrace{x \in A \wedge x \notin B}$
7. $\Rightarrow x \in (A-B)$
8. Por 1 y 7 queda probado:
   $[A - (A \cap B)] \subset (A-B)$

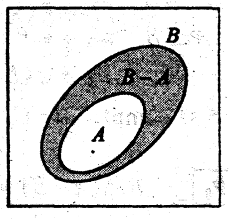
($\supset$) Queda por demostrar:
$(A-B) \subset [A - (A \cap B)]$
Probando las dos inclusiones queda demostrado la igualdad.

2.26 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Definición.- Si A es subconjunto de B, se define el **COMPLEMENTO DE** A con respecto a B, a la diferencia $B-A$.

NOTACIÓN:

$\complement_B A = B - A$ es el complemento de A con respecto a B.



$\complement_B A = B - A$

2.26.1 PROPIEDADES

P1 $\complement_B A \subset B$ y $\complement_A B \subset A$

P2 $A \cup \complement_B A = B$

P3 $A \cap \complement_B A = \phi$

P4 $\complement_A A = \phi$

P5 $\complement_A \phi = \phi$

P6 $\complement_B(\complement_B A) = A$

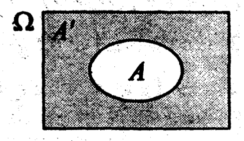
P7 $A - B = A \cap \complement_A B$

2.27 DEFINICIÓN

Sea $A \subset \Omega$, donde Ω es el **CONJUNTO UNIVERSAL**, entonces definimos **EL COMPLEMENTO DE** A, al conjunto formado por todos los elementos de Ω que no pertenece al conjunto A.

DEFINICIÓN SIMBÓLICA

$A' = \Omega - A = \{x \in \Omega / x \notin A\}$
$x \in A' \iff x \notin A$
su negación: $x \notin A' \iff x \in A$



NOTACIÓN:
El complemento del conjunto A, se denota por A'.
También se usan las notaciones: $A' = \complement A = A^C = \overline{A}$

Ejemplo 1: Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y los conjuntos

$$A = \{1,3,5,7\} \Rightarrow A' = \{2,4,6,8,9,10\}$$

$$B = \{x \in \Omega / 4 < x < 8\} \Rightarrow B' = \{x \in \Omega / x \geq 8 \vee x \leq 4\} = \{1,2,3,4,8,9,10\}$$

$$C = \{x \in \Omega / x \geq 6\} \Rightarrow C' = \{x \in \Omega / x < 6\} = \{1,2,3,4,5\}$$

Ejemplo 2: Supongamos que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y sean los conjuntos

$$A = \{2x / x \in \Omega\}$$

$$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 4)(x^2 - 7x + 12) = 0\}$$

$$C = \{x \in \Omega / 9^{x^2 - 3} = 9\}$$

Hallar: (1) A' , (2) B' , (3) C' , (4) $(A \cup B)'$, (5) $(A \cap B)'$, (6) $(B \cup C)'$

Solución:

En primer lugar, expresemos los conjuntos A, B y C por extensión:

$A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{2\}$

Luego:

1) $A' = \{1,3,5,7,9\}$
2) $B' = \{1,5,6,7,8,9,10\}$
3) $C' = \{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
4) $A \cup B = \{2,4,6,8,10,3\}$ y $(A \cup B)' = \{1,5,7,9\}$
5) $A \cap B = \{2,4\}$ y $(A \cap B)' = \{1,3,5,6,7,8,9,10\}$
6) $B \cup C = \{2,3,4\}$ y $(B \cup C)' = \{1,5,6,7,8,9,10\}$

2.27.1 PROPIEDADES DE COMPLEMENTACIÓN

(C_1) $A \cup A' = \Omega$ "La unión de un conjunto con su complemento, es igual al conjunto universal".

(C_2) $A \cap A' = \phi$ "La intersección de un conjunto con su complemento, es igual al conjunto vacío".

(C_3) $\Omega' = \phi$ "El complemento del conjunto universal, es igual al conjunto vacío".

(C4) $\phi' = \Omega$ "El complemento del conjunto vacío, es igual al conjunto universal".

(C5) $(A')' = A$ "El complemento del complemento de un conjunto, es igual al mismo conjunto".

(C6) $A - B = A \cap B' = A\overline{B}$

(C7) $A \subset B \iff B' \subset A'$

2.28 APLICACIONES IMPORTANTES

La diferencia de dos conjuntos " $A - B$ " tiene una gran importancia para formar **CONJUNTOS DISJUNTOS**, que tiene su aplicación inmediata en el **CÁLCULO DE PROBABILIDADES.**

A continuación, hago algunas aclaraciones al respecto:

PRIMERO Las diferentes notaciones que se usan para la diferencia de dos conjuntos A y B, son:

$$A - B = A \cap B' = AB^{C} = A\overline{B} = A \cap \complement B$$

SEGUNDO A continuación veamos la interpretación que se le da al conjunto diferencia: $A - B = A\overline{B}$; al conjunto unión: $A \cup B$; al conjunto intersección: $A \cap B$; al conjunto complemento de A: $\overline{A}$; al conjunto: $AB^{C}C^{C} = A\overline{B}\overline{C}$, etc.

Experimento Aleatorio.- Es un ensayo u operación cuyo resultado no puede predecirse. Extraer una bola numerada de una urna, tirar un dado y observar el número que aparece en la cara superior; son experimentos aleatorios.

Al elegir, al azar, 30 personas y encuestarlas sobre un tema de interés, el resultado de este ensayo es un experimento aleatorio. Al conjunto de todos los resultados obtenidos de un experimento aleatorio se llama **ESPACIO MUESTRAL** (es el conjunto universal Ω). A cada elemento del espacio muestral, se le llama **EVENTO ELEMENTAL.**

A cada subconjunto del espacio muestral se le llama, simplemente **EVENTO O SUCESO.**

Si los conjuntos A, B y C son eventos o sucesos de Ω, entonces los conjuntos: $\overline{A}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, ABC, etc. también son eventos de Ω y tienen una interpretación, que se muestra en el siguiente cuadro.

EVENTO	REPRESENTACIÓN CONJUNTISTA DEL EVENTO	REPRESENTACIÓN DEL EVENTO USANDO LOS DIAGRAMAS DE VENN
"ocurre el suceso *A*"	A	
"No ocurre el suceso *A*"	$\bar{A}$	A
"ocurre el suceso *B*"	B	
"No ocurre el suceso *B*"	$\bar{B}$	B
"***Por lo menos*** ocurre uno de los sucesos" (De dos sucesos *A* y *B* existentes).	$A \cup B$	
"***Por lo menos*** ocurre uno de los sucesos" (De *n* sucesos existentes).	$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ..... \cup A_n$	

EVENTO	REPRESENTACIÓN CONJUNTISTA DEL EVENTO	REPRESENTACIÓN DEL EVENTO USANDO LOS DIAGRAMAS DE VENN
"Ocurre A y ocurre B" "A y B ocurren a la vez" "Los dos sucesos A y B ocurren simultáneamente"	$A \cap B$ o AB	
"Todos ocurren a la vez" (De "n" eventos existentes)	$A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n$ o $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$	
"Sólo ocurre A" "ocurre A, pero no ocurre B" "ocurre A y no ocurre B"	$A \cap B^C$ o $A\bar{B}$ o AB'	
"Sólo ocurre B" "ocurre B, pero no ocurre A" "ocurre B y no ocurre A"	$B \cap A^C$ o $B\bar{A}$ o BA'	
De tres eventos existentes "Sólo ocurre A" "ocurre A, y no ocurren B y C"	$AB'C'$ ó AB^CC^C ó $A\bar{B}\bar{C}$	
De tres eventos existentes "Sólo ocurre B" "ocurre B y no ocurren A ni C"	$B\bar{A}\bar{C}$ ó $BA'C'$ ó BA^CC^C	
De tres eventos existentes: "Sólo ocurre C"	$C\bar{A}\bar{B}$ ó $CA'B'$ ó CA^CB^C	

EVENTO	REPRESENTACIÓN CONJUNTISTA DEL EVENTO	REPRESENTACIÓN DEL EVENTO USANDO LOS DIAGRAMAS DE VENN
De tres eventos A, B y C existentes: "sólo uno de los sucesos ocurre"	$A\overline{B}\overline{C} + B\overline{A}\overline{C} + C\overline{A}\overline{B}$ ó $AB'C' + BA'C' + CA'B'$	
De tres eventos: A, B y C existentes: "sólo dos sucesos ocurren"	$AB\overline{C} \cup AC\overline{B} \cup BC\overline{A}$ ó $ABC' + ACB' + BCA'$ ó $(AB \cup AC \cup BC) - ABC$	
"Por lo menos, dos sucesos ocurren"	$AB \cup AC \cup BC$ ó $AB\overline{C} + AC\overline{B} + BC\overline{A} + ABC$	
"A, B y C ocurren a la vez"	$A \cap B \cap C$ ó ABC	
"A lo más, ocurren dos sucesos"	$A \cup B \cup C - A \cap B \cap C$ ó $\underbrace{\underbrace{AB'C' + BA'C' + CA'B'}_{\text{sólo 1}} + \underbrace{ABC' + ACB' + BCA'}_{\text{sólo 2}}}_{\text{A lo mas 2}}$	
"Si A ocurre, también ocurre B"	$A \subset B$	
	$A \cup B \cup C - C\overline{A}\overline{B}$	

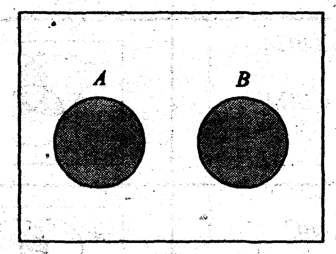
TERCERO Ahora, voy a definir lo que son **CONJUNTOS DISJUNTOS.**

2.29 DEFINICIÓN

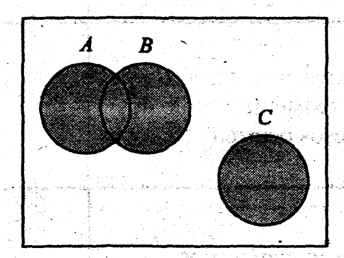
Dos conjuntos A y B, son disjuntos, si $A \cap B = \phi$

Es decir, si dos conjuntos A y B **NO TIENEN NINGÚN ELEMENTO EN COMÚN**, entonces decimos que dichos conjuntos son disjuntos.

Ejemplos:



En este diagrama, podemos apreciar que $A \cap B = \phi$, por lo tanto, los conjuntos A y B son disjuntos.



En este diagrama, podemos ver que $(A \cup B) \cap C \neq \phi$; por lo tanto los conjuntos $(A \cup B)$ y C son disjuntos.

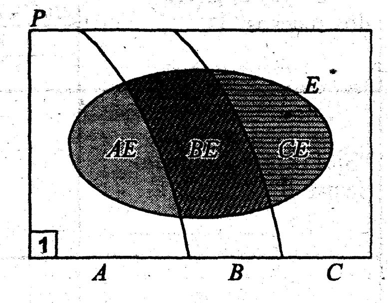
CUARTO En seguida, veamos cómo podemos formar **CONJUNTOS DISJUNTOS** usando las operaciones conjuntistas de: unión de dos conjuntos, intersección de dos conjuntos y el complemento de un conjunto.

NOTA ACLARATORIA:

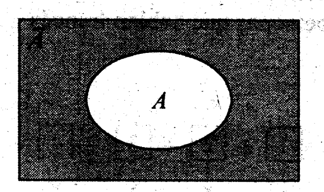
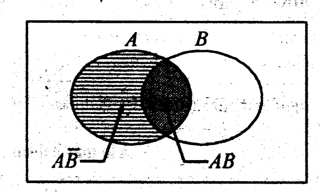
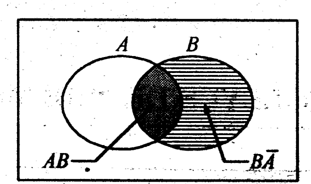
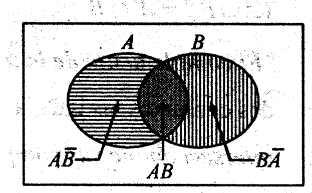
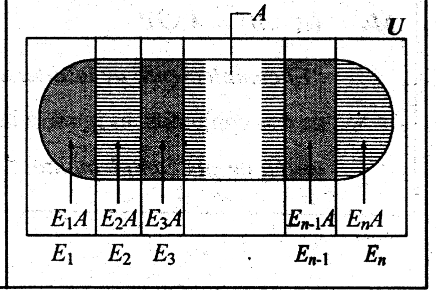
La unión de **CONJUNTOS DISJUNTOS**, se expresa como **SUMA DE CONJUNTOS DISJUNTOS.**

EJEMPLO INTUITIVO: Una forma sencilla de intuir cómo son los conjuntos disjuntos es comparándola con un rompecabezas.

1. Imaginemos el Perú (P) dividido en 3 regiones: costa (A), sierra (B) y selva (C), cuyas fronteras estén bien definidas.
2. Por otro lado, supongamos que E sea el presupuesto de la república ($E \subset P$), de modo que a cada región le corresponde una parte del presupuesto.

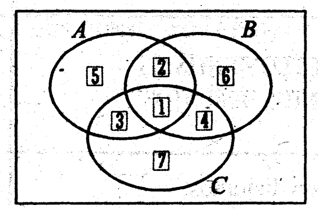


Si el presupuesto se distribuye proporcionalmente a cada región, el diagrama que exprese todas las relaciones conjuntistas entre P, A, B, C y E en el que estén bien definidas los conjuntos disjuntos es el diagrama 1.

OPERACIONES CONJUNTISTAS CON CONJUNTOS DISJUNTOS	REPRESENTACIÓN EN DIAGRAMAS DE VENN-EULER
Los conjuntos A y $\bar{A}$ son disjuntos, porque $A \cap \bar{A} = \phi$ Además: $A + \bar{A} = \Omega$ (expresa la unión de los conjuntos disjuntos A y $\bar{A}$)	
Los conjuntos $A\bar{B}$ y AB son disjuntos, porque $(A\bar{B}) \cap (AB) = \phi$ Además: $A = A\bar{B} + AB$	
Los conjuntos AB y $B\bar{A}$ son disjuntos, porque $(AB) \cap (B\bar{A}) = \phi$ Además: $B = AB + B\bar{A}$	
Los conjuntos: $A\bar{B}$, AB y $B\bar{A}$ son disjuntos. Además: $A \cup B = A\bar{B} + AB + B\bar{A}$	
Los conjuntos: $E_1A, E_2A, \ldots\ldots E_{n-1}A$ y E_nA son disjuntos; porque: $(E_iA) \cap (E_jA) = \phi$ Además: $A = E_1A + E_2A + \ldots\ldots + E_nA$ $\forall\, i \neq 1$ $i = 1, 2, \ldots n$ $j = 1, 2, \ldots n$ Esta partición de conjuntos se usa en el teorema de BAYES (cálculo de probabilidades)	

Supongamos que se tenga 3 grupos de personas:

A : personas que habla alemán
B : personas que hablan inglés
C : personas que hablan francés



El siguiente diagrama, expresa diversas formas de conjuntos disjuntos.

$$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4} + \boxed{5} + \boxed{6} + \boxed{7} = A \cup B \cup C$$

$$ABC + ABC' + ACB' + BCA' + AB'C' + BA'C' + CA'B'$$

- ABC: Hablan los 3 idiomas
- $ABC' + ACB' + BCA'$: Hablan solo dos idiomas
- $AB'C' + BA'C' + CA'B'$: Hablan sólo un idioma
- $ABC + ABC' + ACB' + BCA'$: Por lo menos hablan dos idiomas
- $ABC' + ACB' + BCA' + AB'C' + BA'C' + CA'B'$: A lo más hablan dos idiomas
- $ABC + ABC' + ACB' + BCA' + AB'C' + BA'C' + CA'B'$: Por lo menos hablan un idioma

2.30 LEYES DE "DE MORGAN"

	Generalizando
M_1 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ "***El complemento de la unión de*** dos conjuntos, es igua, a la ***intersección de sus complementos***"	$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i'$
M_2 $(A \cap B)' = A' \cup B'$ "***El complemento de la intersección*** de dos conjuntos, es igual, a la ***unión de sus complementos***"	$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$

2.31 GENERALIZACIÓN DE LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE UNA FAMILIA O COLECCIÓN FINITA DE CONJUNTOS

① Si $\mathfrak{F} = \{ A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \}$ es una colección finita de conjuntos, ***la unión de todos los conjuntos de*** $\mathfrak{F}$ se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen, ***por lo menos*** a uno de los conjuntos de $\mathfrak{F}$.

Notación: Sea: $A_1 \cup A_2 \cup, \ldots\ldots\ldots, \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \exists\, i / x \in A_i$$

Se lee: $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ si, y sólo si existe por lo menos un subíndice i tal que, x pertenece a A_i

② Si $\mathfrak{F} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ es una colección finita de conjuntos, ***la intersección*** de todos los conjuntos de $\mathfrak{F}$ se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ***todos los conjuntos de*** $\mathfrak{F}$.

Notación: Sea: $A_1 \cap A_2 \cap, \ldots\ldots, \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Entonces: $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x \in A_i \;,\; \forall\, i$

Donde: $\bigcap_{i=1}^{n} A = \{ x / x \in A_1 \;\wedge\; x \in A_2 \;\wedge\; \ldots\ldots \wedge\; x \in A_n \}$

$$= \{ x / x \in A_i \;,\; \forall\, i \}$$

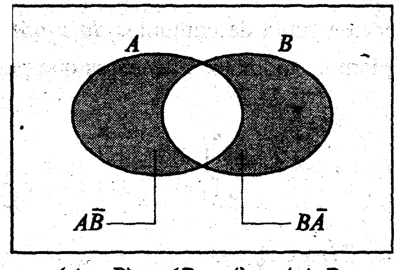
2.32 DIFERENCIA SIMÉTRICA

Definición.- Dado dos conjuntos A y B de Ω definimos ***el conjunto diferencia de A y B***, denotado por $A \,\Delta\, B$, al conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Es decir: $\boxed{A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)}$

La notación: $A \Delta B$ se lee: "La diferencia simétrica de A y B"

Diagrama de Venn - Euler



$(A - B) \cup (B - A) = A \Delta B$

PROPIEDAD 1

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
$= (A - B) \cup (B - A)$
$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$
$= A\bar{B} + B\bar{A}$ — unión de conjuntos disjuntos

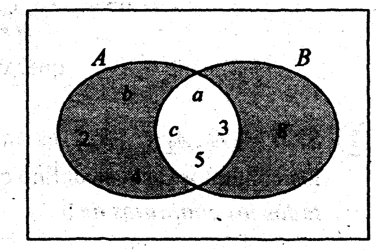
<u>Ejemplo</u>: Sean los conjuntos:

$A = \{a, b, c, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, 3, 5, c, 8\}$

Entonces: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{b, 2, 4\} \cup \{8\}$

$= \{b, 2, 4, 8\}$



2.32.1 PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA SIMÉTRICA

P_1. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

P_2. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .... Asociativa

P_3. $A \Delta B = B \Delta A$ .... Conmutativa

P_4. $A \Delta \phi = A$

P_5. $A \Delta A = \phi$

P_6. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .... Distributiva

P_7. $(A \Delta B) \cup (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

Demostración de P_1:

1) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ...... definición de Δ

2) $\quad = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

3) $\quad = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

4) $\quad = [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$

5) $\quad = [\underbrace{(A \cap A')}_{\phi} \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}]$

6) $\quad = (B \cap A') \cup (A \cap B')$

7) $\quad = (B - A) \cup (A - B)$

8) $\quad = (A - B) \cup (B - A)$

Demostración de P_4: $A \Delta \phi = A$

1) $A \Delta \phi = (A \cup \phi) - (A \cap \phi)$

2) $\quad = A - \phi$

3) $\quad = A$

Demostración de P_5 : $A \Delta A = \phi$

1) $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A)$

2) $\quad = A - A$

3) $\quad = \phi$

Probar P_3 : $A \Delta B = B \Delta A$

Veamos: $A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$ .... definición de dif. simétrica

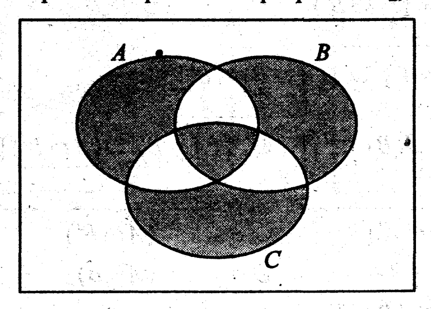
$= (B \cup A) - (A \cap B)$ .... Propiedad conmutativa de la unión e intersección.

$= B \Delta A$

Probar P_2 : $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

Antes de hacer la demostración, propongo dos sugerencias:

1. Se puede recurrir a los diagramas de Venn para intuir y poder formalizar la demostración requerida.
   Por ejemplo, el diagrama que corresponde a la propiedad P_2, es:



$$A \Delta B \Delta C = A \cap B' \cap C' + B \cap A' \cap C' + C \cap A' \cap B' + A \cap B \cap C$$

2. La diferencia simétrica, es la unión de conjuntos disjuntos.
   Podemos convenir en reemplazar el símbolo "U" (unión) por "+" cuando se trata de unir conjuntos disjuntos.

   Así por ejemplo: $A + A' = \Omega$

$$A = A \cap B' + A \cap B$$

$$B = B \cap A' + B \cap A$$

$$A \Delta B = A \cap B' + B \cap A'$$

Ahora vayamos a la demostración:

$$(A \Delta B) \Delta C =$$

$$= [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \Delta C$$

$$= [(A \cap B') \cup (B \cap A')] - C \quad \cup \quad C - [(A \cap B') \cup (B \cap A')]$$

$$= [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cap C' \quad \cup \quad C \cap [(A \cap B') \cup (B \cap A')]'$$

$$C \cap [(A \cap B')' \cap (B \cap A')']$$

$$C \cap [(A' \cup B) \cap (B' \cup A)]$$

$$[C \cap (A' \cup B)] \cap (B' \cup A)$$

$$= [(A \cap B') \cap C'] \cup [(B \cap A') \cap C'] \cup [(C \cap A') \cup (C \cap B)] \cap (B' \cup A)$$

$$[(C \cap A') \cap (B' \cup A)] \cup [(C \cap B) \cap (B' \cup A)]$$

$= [A\cap B'\cap C'] \cup [B\cap A'\cap C'] \cup [(C\cap A'\cap B')\cup\underbrace{(C\cap A'\cap A')}_{\phi}]\cup[\underbrace{(C\cap B\cap B')}_{\phi}\cup(C\cap B\cap A)]$

$= \underline{A\cap B'\cap C'} + B\cap A'\cap C' + C\cap A'\cap B' + \underline{A\cap B\cap C}$

Asociar:

$= [A\cap B'\cap C' + A\cap B\cap C] + [B\cap A'\cap C' + C\cap A'\cap B']$

$= [A\cap B\cap C + A\cap B'\cap C'] + [B\cap C'\cap A' + C\cap B'\cap A']$

$= A\cap \underbrace{[B\cap C + B'\cap C']}_{B\cap C+(B\cup C)'} + \underbrace{[(B\cap C') + (C\cap B')]}_{B\Delta C}\cap A'$

$= A\cap \underbrace{[(B\cap C)'\cap(B\cup C)]'}_{B\Delta C} + (B\Delta C)\cap A'$

$= \underbrace{[A\cap (B\Delta C)'] + [(B\Delta C)\cap A']}_{A\Delta(B\Delta C)}$

Demostración de P_6 : $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Debo probar que : $A\cap(B\Delta C) = [(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$

1) $A\cap(B\Delta C) = A\cap[(B-C)\cup(C-B)]$ .... **Propiedad P_1**

2) $= A\cap[(B\cap C')\cup(C\cap B')]$

3) $= [A\cap(B\cap C')]\cup[A\cap(C\cap B')]$

4) $= [(A\cap B)\cap C']\cup[(A\cap C)\cap B']$ ♦ Pero: $\begin{cases}(A\cap B)\cap C' = (A\cap B)\cap(A'\cup C')\\(A\cap C)\cap B' = (A\cap C)\cap(A'\cup B')\end{cases}$

5) $= [(A\cap B)\cap(A'\cup C')]\cup[(A\cap C)\cap(A'\cup B')]$

6) $= [(A\cap B)\cap(A\cap C)']\cup[(A\cap C)\cap(A\cap B)']$

7) $= [(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$

8) $= (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

♦ Probar que: $(A\cap B)\cap C' = (A\cap B)\cap(A'\cup C')$

Partir del 2° miembro: $(A\cap B)\cap(A'\cup C') = [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$

$= [A\cap(B\cap A')]\cup[(A\cap B)\cap C']$

$= [A\cap(A'\cap B)]\cup[(A\cap B)\cap C']$

$= [\underbrace{(A\cap A')}_{\phi}\cap B)]\cup[(A\cap B)\cap C']$

$= \phi$

$$= [\underbrace{\phi \cap B}] \cup [(A\cap B)\cap C']$$
$$= \quad \phi \quad \cup [(A\cap B)\cap C']$$
$$= (A\cap B)\cap C'$$

2.33 DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPIEDADES

P_7 de la intersección:

Demostrar que: $A \subset B \iff A \cap B = A$

Demostración:

Se demuestra en dos partes: 1) La implicación de "ida" $(\Rightarrow)$
2) La implicación de "venida" $(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$ Para demostrar que: $A \subset B \Rightarrow (A\cap B) = A$, debo demostrar que:
$(A\cap B) \subset A \wedge A \subset (A\cap B)$ sabiendo que por hipótesis se tiene: $A \subset B$.

Veamos:

1) La proposición $(A\cap B)\subset A$ siempre es verdadera, por la siguiente razón:

Si $x \in (A\cap B) \Rightarrow [(\underbrace{x\in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q})] \rightarrow (\underbrace{x\in A}_{p})$

Esto es la tautología: $p \wedge q \rightarrow p$

2) Ahora nos queda por demostrar que: $A \subset (A\cap B)$, sabiendo que $A \subset B$.

Veamos:

Por hipótesis tenemos que: $A \subset B$

Luego: Si $\boxed{x \in A \rightarrow x \in B \;,\; \forall x \in A}$ .... (i)

En (i) usemos la tautología: $(p \rightarrow q) \equiv [\underbrace{(p \wedge p)} \rightarrow p \wedge q]$
$\equiv [\; p \rightarrow p\wedge q]$

Entonces: Si $\underbrace{[\underbrace{(x\in A)}_{p} \wedge \underbrace{(x\in A)}_{p}]} \rightarrow \underbrace{[\underbrace{(x\in A)}_{p} \wedge \underbrace{(x\in B)}_{q}]}$

$\iff$ Si $x \in A \rightarrow x \in (A \cap B)$ .... (ii)

3) La proposición (ii) implica que: $A \subset (A\cap B)$, $\forall \underbrace{x\in A}_{p}$

4) Por (1) y (3) se tiene : $A \cap B = A$

$(\Leftarrow)$ Demostrar que : $A\cap B = A \Rightarrow A \subset B$

Queda como ejercicio......

PROBLEMAS

01. Sean A, B, C conjuntos no vacíos; usando elementos demostrar que: $B \in \mathcal{P}(A) \wedge A \Delta B = A \cup B - A \cap B$ implica $A \Delta B = A - B$.

02. Si para los conjuntos A, B, C se tiene: $A \subset B$ y $C \cap A = \phi$, simplificar la expresión:
$\{[A \cup (B-C)] \cap [B \cup (C-A)]\} \cup \{(A-B) \Delta C\}$

03. Demostrar usando propiedades de conjuntos que para los conjuntos A, B y C:

$$[\complement A - (\complement B - C)] \subset A \Delta \complement(B - \complement C)$$

implica $A \cup B \cup C \subset A \cup \complement B \cup \complement C$.

04. Para conjuntos A, B demostrar usando propiedades que:

$A \Delta \complement B = B$ implica $B \subset A \vee \complement A \subset B$.

Justifique su desarrollo.

05. Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera. Demostrar:

a) $A - B = (A \Delta B) - B$

b) $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \phi$

06. Sean A, B, C subconjuntos de U.

a) Demostrar mediante elementos que $A - (A \Delta B) = A \cap B$

b) Mediante propiedades, demostrar: $(A \Delta B) \subset (A \Delta C \cup B \Delta C)$.

07. En un conjunto universal U, consideremos los subconjuntos A, B, C de U.

a) Si A, B, C son tales que:
$(A \cap C) \subset (B \cap C) \wedge (A \cap \complement C) \subset (B \cap \complement C)$
Demostrar que $A \subset B$

b) Si A, B, C son tales que:
$A \cap C = B \cap C \wedge A \cap \complement C = B \cap \complement C$ ¿se cumplirá $A = B$?. Justifique su respuesta

08. Demostrar que si A, B, C son subconjuntos de U, se cumple:

$$[(A-B)-C] \subset [A-(B-C)]$$

Verifique con un ejemplo que la igualdad en general no se cumple.

09. Si $A \cap B \cap C = \phi$, simplificar:
$(A-B) \cup (B-C) \cup (C-A)$

10. Sean A, B, conjuntos cualesquiera, demostrar que:
$\complement A - (\complement B - A) = B - \complement A$ implica $B \subset A$.

11. Demostrar mediante elementos:
$B \subset A \cup (B - A)$

12. Sean A, B, C tres subconjuntos de U, tales que verifican lo siguiente:
$(A-B) \subset (A \cap C) \wedge (B-C) \subset (B \cap A)$
Mediante propiedades, demostrar que:
$A \subset (B \cup C)$.

Sugerencia: Aplicar
$M \subset N \Longleftrightarrow M \cap \complement N = \phi$

(D1) Demostrar que: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Para probar la igualdad de conjuntos, debo probar la doble inclusión:

$$\underbrace{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)}_{I} \quad \wedge \quad \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)}_{II}$$

PARTE I

1)	Supongamos que:	$\forall x \in [A \cap (B \cup C)]$	(Hipótesis)
2)	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge x \in (B \cup C)$	(Definición de $\cap$)
3)	$\Rightarrow$	$\underbrace{x \in A}_{p} \wedge [\underbrace{x \in B}_{q} \vee \underbrace{x \in C}_{r}]$	(Definición de Unión)
4)	$\Rightarrow$	$[\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}] \vee [\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in C}_{r}]$	(Tautología)
5)	$\Rightarrow$	$x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$	(Definición de $\cap$)
6)	$\Rightarrow$	$x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$	(Definición de Unión)

7) Por (1) y (6) se cumple: $A \cap (B \cup C) \subset [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

Para ésta demostración hemos usado la tautología:

$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

PARTE II *Queda como ejercicio.........*

Sugerencia: Partir de (6) y llegar a (1)

(D_2) Demostrar que: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sugerencia: usar definiciones de unión, intersección y la

Tautología: $p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(M_1) Demostrar que: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ Ley de "De Morgan"

Para demost. que: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ debo demostrar que:

$$\underbrace{(A \cup B)' \subset A' \cap B'}_{\text{I}} \wedge \underbrace{A' \cap B' \subset (A \cup B)}_{\text{II}}$$

PARTE I

1)	Supongamos que:	$x \in (A \cup B)'$	(hipótesis)
2)	$\Rightarrow$	$x \notin (A \cup B)$	(definición de complemento)
3)	$\Rightarrow$	$x \notin A \wedge x \notin B$	$\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
4)	$\Rightarrow$	$x \in A' \wedge x \in B'$	Def. de complemento
5)	$\Rightarrow$	$x \in (A' \cap B')$	Def. de Intersección

6) Por (1) y (5) y definición de inclusión, se cumple que: $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

PARTE II *Queda como ejercicio.........*

Sugerencia: Partir de (5) y llegar a (1)

(M_2) Demostrar que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ Ley de "De Morgan"

Demostración:

Debo demostrar que: $\underbrace{(A \cap B)' \subset A' \cup B'}_{\text{I}} \wedge \underbrace{A' \cup B' \subset (A \cap B)'}_{\text{II}}$

PARTE I

1) Supongamos que: $x \in (A \cap B)'$ **(hipótesis)**

2) $\Rightarrow$ $x \notin (A \cap B)$ (Definición de complemento)

3) $\Rightarrow$ $x \notin A \vee x \notin B$ (Tautología: $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$)

4) $\Rightarrow$ $x \in A' \vee x \in B'$ (Definición de complemento)

5) $\Rightarrow$ $x \in (A' \cup B')$ (Definición de la Unión)

6) Por (1) y (5) y definición de inclusión, se cumple: $(A \cap B)' \subset (A' \cup B')$

PARTE II *Queda como ejercicio.........*

Sugerencia: Partir de (6) y llegar a (1)

Así habremos demostrado que: $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$,

lo cual indica que: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(C_5) Demostrar que: $(A')' = A$

Demostración: La demostración la haré por definición del complemento de un conjunto.

Veamos:

$$(A')' = \{x \in \Omega / x \notin A'\}$$
$$= \{x \in \Omega / x \in A\} = A$$

(C_7) Demostrar que: $A \subset B \Longleftrightarrow B' \subset A'$

Demostración:

Aplicar la tautología $(p \to q) \longleftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

Así:

Si $A \subset B$ implica que

$$[\forall x \in A \ , \ \underbrace{x \in A}_{p} \rightarrow \underbrace{x \in B}_{q}] \longleftrightarrow [\ x \notin B \rightarrow x \notin A\ ]$$

$$x \in B' \rightarrow x \in A'$$

$$\longleftrightarrow [\ \forall x \in B' \ , \ B' \subset A'\ ]$$

También se puede demostrar del siguiente modo:

($\Rightarrow$)

1) Por hipótesis tenemos que: $A \subset B$

2) Pero $A \subset B \iff A \cup B = B$ .... ⊛

3) Aplicando **COMPLEMENTOS** a ambos miembros de ⊛:

4) $\underbrace{(A \cup B)'}_{} = B'$

$A' \cap B' = B'$ .... Ley de "De Morgan"

5) Pero $\underbrace{A' \cap B'}_{B'} \subset A'$ .... Pues, toda intersección está incluído en cualquier conjunto de la intersección.

6) Luego: $B' \subset A'$ .... Por el paso (4)

—lqqd—

($\Leftarrow$) Por demostrar que: $B' \subset A' \Rightarrow A \subset B$

Queda como ejercicio.........

(C_1) $A \cup A' = \Omega$

La demostración se hace aplicando la tautología:

$$p \vee \sim p \equiv T \quad , \; T = \text{tautología}$$

Así: $\underbrace{x \in A}_{p} \cdot \vee \underbrace{x \notin A}_{\sim p} \equiv \underbrace{x \in \Omega \; , \; \forall x}_{T}$

(C_3) $\Omega' = \phi$

Definición: $\Omega = \{x / x = x\}$

La negación de $p \; : \; x = x$

es $\sim p \; : \; x \neq x$

Luego $\Omega' = \{x / x \neq x\} = \phi$

2.34 PROBLEMAS RESUELTOS

(1) Demostrar que: $A \subset B' \iff B \subset A'$

Demostración: 1) Por el ejercicio C_7 se cumple que:

$A \subset B' \iff (B')' \subset A'$

2) $\iff B \subset A'$ .... Pues: $(B')' = B$

(2) Consideremos A y B subconjuntos del conjunto UNIVERSAL Ω.

Pruebe que: $A' - B' = B - A$

Demostración:

Partiré de $A' - B'$ para llegar a $B - A$

Veamos:

1) $A' - B' = A' \cap (B')'$	(Prop. de la Diferencia)
$= A' \cap B$	$(B')' = B$
$= B \cap A'$	(Propiedad conmutativa de $\cap$)
$= B - A$	(Propiedad de la Diferencia)

(3) Demostrar que: $(A-B)' = B \cup A'$

Demostración: La demostración por propiedades, consiste en partir de un miembro para llegar al otro miembro de la relación igual.

Veamos: Partiré de $(A-B)'$ para llegar a $B \cup A'$

1) $(A-B)'$	$= (A \cap B')'$	Propiedad: $A-B = A \cap B'$
2)	$= A' \cup (B')'$	Ley de "De Morgan"
3)	$= A' \cup B$	Propiedad: $(B')' = B$
4)	$= B \cup A'$	Propiedad conmutativa.

(4) Demostrar que $(A \cap B) - E = A \cap (B - E)$

Demostración: Partiré de $(A \cap B) - E$ para llegar a $A \cap (B - E)$

Veamos:

1) $(A \cap B) - E$	Hipótesis
2) $(A \cap B) \cap E'$	Propiedad de la DIFERENCIA
3) $A \cap (B \cap E')$	Propiedad Asociativa de la $\cap$
4) $A \cap (B - E)$	Propiedad de la DIFERENCIA

(5) Demostrar que $A - B = A \iff A \cap B = \phi$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Por demostrar que, si $\underbrace{A - B = A}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A \cap B = \phi}_{\text{Tesis}}$

Veamos:

1) Partir de $A \cap B$

2) Por hipótesis tenemos que: $\underbrace{A - B}_{A \cap B'} = A$

3) Reemplazar el conjunto $A = A \cap B'$ del paso (2), al paso (1)

$$A \cap B = (A \cap B') \cap B$$

$= A \cap (B' \cap B)$	Propiedad asociativa
$= A \cap (\phi)$	Porque: $B' \cap B = \phi$
$= \phi$	Porque: $A \cap \phi = \phi$

($\Leftarrow$)

Por probar: Si $A \cap B = \phi \Rightarrow A - B = A$

1. Por la propiedad P_1 de diferencia de conjuntos que afirma: $A \subset B \Longleftrightarrow A - B = \phi$
   podemos deducir de $A \cap B = \phi$, lo siguiente: $A \cap B' = \phi$

$$A \cap (B')' = \phi \text{, pues } (B')' = B$$

   lo cual implica: $A \subset B'$

2. Como: $A \subset B'$ entonces $\underbrace{A \cap B'}_{A - B} = A$

$$A - B = A$$

   En consecuencia: $A - B = A \Longleftrightarrow A \cap B = \phi$

6 Demostrar que: Si $\underbrace{E \subset A}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{A-(B-E)=(A-B)\cup E}_{\text{Tesis}}$

Demostración:

Partiré de: $A-(B-E)$. Para llegar a $(A-B)\cup E$ usando la hipótesis $E \subset A$.

Veamos:

1) $A-(B-E) = A-(B \cap E')$ Prop.: $B - E = B \cap E'$

$= A \cap (B \cap E')'$ Prop.: $A - C = A \cap C'$, $C = B \cap E'$

$= A \cap (B' \cup (E')')$ Ley de "De Morgan"

$= A \cap (B' \cup E)$ Prop. $(E')' = E$

$= (A \cap B') \cup (\underline{\underline{A \cap E}})$ Prop. DISTRIBUTIVA

2) Pero $E \subset A \Longleftrightarrow \underline{\underline{E \cap A}} = E$ Prop. ya demostrado

3) Reemplazando (2) en (1)……….(i)

$= (A \cap B') \cup E$

$= (A - B') \cup E$ Prop. $A \cap B' = A - B$

7 Demuestre que: $B - A = B - (A \cap B)$

Demostración:

Partiré de $B-(A \cap B)$ para llegar a $B - A$

Veamos:

1)	$B-(A\cap B)$	$= B\cap(A\cap B)'$	(Prop. de la Diferencia)
2)		$= B\cap(A'\cup B')$	(Ley de "De Morgan")
3)		$= (B\cap A')\cup(B\cap B')$	(Ley distributiva)
4)		$= (B\cap A')\cup\phi$	(Prop. $B\cap B'=\phi$)
5)		$= B\cap A'$	(Prop. $C\cup\phi=C$, $C=B\cap A'$)
6)		$= B-A$	(Prop. $B\cap A'=B-A$)

—*lqqd*—

EJERCICIOS

① Demuestre que: $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

② Demuestre que: $(A-B)\cup(A\cap C)=A-(B-C)$

③ Demuestre que: $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$

④ Demuestre que: $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

⑤ Demuestre que: $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

⑥ Demuestre que: $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

⑦ Demuestre que: $(A\cap B)'\cap(A'\cup B)=A'$

⑧ Demuestre que: $(A\cap B)\cup(A\cup B')'=B$

⑨ Demuestre que: $(A-B)\cup(B'-A')=A-B$

2.35 PROBLEMAS RELATIVOS AL CONJUNTO POTENCIA

$\mathcal{P}(A)$ ó 2^A

① Dados los conjuntos $A=\{2\}$ y $B=\{1,2,4\}$

Determine *i)* $\mathcal{P}(A\cup B)\cup\mathcal{P}(A\cap B)$

ii) $\mathcal{P}(A\cup B)\cap\mathcal{P}(A\cap B)$

Solución:

1) En primer lugar, hallemos $A\cup B$ y $A\cap B$:

$A\cup B=\{2,1,4\}$; $A\cap B=\{2\}$

2) En segundo lugar, hallemos $\mathcal{P}(A\cup B)$ y $\mathcal{P}(A\cap B)$:

$\mathcal{P}(A\cup B)=\{\{2\},\{1\},\{4\},\{2,1\},\{2,4\},\{1,4\},A\cup B,\phi\}$

$\mathcal{P}(A\cap B)=\{A\cap B,\phi\}$

3) Entonces:

i) $\mathcal{P}(A\cup B)\cup\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A\cup B)$; pues $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

ii) $\mathcal{P}(A\cup B)\cap\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A\cap B)$

(2) Demostrar que: $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$

Demostración:

(⊂)

1) Supongamos que: $X\in\mathcal{P}(A\cap B)$ ....(X = conjunto arbitrario)

2) $\Rightarrow$ $X\subset(A\cap B)$ .... (Def. de conjunto potencia)

3) $\Rightarrow$ $(X\subset A)\wedge(X\subset B)$ ...... (Def. de Intersección)

4) $\Rightarrow$ $X\in\mathcal{P}(A)\wedge X\in\mathcal{P}(B)$ ...... (Def. conjunto potencia)

5) $\Rightarrow$ $X\in(\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B))$ .... (Def. de $\cap$)

6) Por lo tanto:

$\mathcal{P}(A\cap B)\subset\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B))$ ...... (Def. inclusión)

(⊃)

7) Supongamos que: $X\in(\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B))$ .... (Hipót. auxiliar)

8) $\Rightarrow$ $X\in\mathcal{P}(A)\wedge X\in\mathcal{P}(B)$ ...... (Def. de $\cap$)

9) $\Rightarrow$ $(X\subset A)\wedge(X\subset B)$ .... (Def. (A) y (B))

10) $\Rightarrow$ $X\subset(A\cap B)$ .... (Def. de $\cap$)

11) $\Rightarrow$ $X\in\mathcal{P}(A\cap B)$ .... (Def. de Conj. potencia)

12) Luego, por (7) y (11) se cumple:

$\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cap B)$ .... (Def. de inclusión)

13) Por (6) y (12), tendremos que:

$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$ .... (Def. de igualdad)

(3) Demostrar que si A y B son dos conjuntos, entonces: $[\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)]\subset\mathcal{P}(A\cup B)$

Demostración:

1) Sea $X \in [\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)]$ .... (Hipot. auxiliar)
2) $\Rightarrow$ $X \in \mathcal{P}(A) \quad \vee \quad X \in \mathcal{P}(B)$ .... (Def. de UNIÓN)
3) $\Rightarrow$ $[X \subset A] \quad \vee \quad [X \subset B]$ .... (Def. conj. POTENCIA)
4) $\Rightarrow$ $X \subset (A \cup B)$ .... (Def. de UNIÓN)
5) $\Rightarrow$ $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ .... (Def. conj. POTENCIAN)
6) Luego, por (1) y (5) se cumple: $[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)] \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Ejemplo 1.- Sean los conjuntos $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$

Entonces: *i)* $A \cup B = \{1,2\}$, $A \cap B = \phi$

ii) $\mathcal{P}(A) = \{A, \phi\}$ y $\mathcal{P}(B) = \{B, \phi\}$

iii) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{A, B, A \cup B, \phi\}$

iv) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{A, B, \phi\}$

v) Como vemos: $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Ejemplo 2.- Sean los conjuntos: $A = \{\{2,1\},3\}$ y $B = \{\{a,b\},3,\{2,1\}\}$

Hallar: a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B - A$
d) $\mathcal{P}(A)$ e) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A \cup B)$ f) $\mathcal{P}(A \cap B) \cap \mathcal{P}(A \cup B)$

***Solución*:**

a) $A \cap B = \{\{2,1\},3\} = A$ b) $A \cup B = \{\{a,b\},3,\{2,1\}\} = B$

c_1) $A - B = \{\ \}$ c_2) $B - A = \{\{a,b\}\}$

d) $\mathcal{P}(A) = \{\{\{2,1\}\},\{3\}, A, \phi\}$,

$\mathcal{P}(B) = \{\{\{a,b\}\},\{3\},\{\{2,1\}\},\{\{a,b\},3\},\{\{a,b\},\{2,1\}\},\underbrace{\{3,\{2,1\}\}}_{A},B,\phi\}$

$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B)$; esto ocurre porque $A \subset B$ $\rightarrow$ $A \cap B = A$, $A \cup B = B$, $A - B = \phi$

Como $A \subset B$, se cumplen
$$\begin{cases} 1)\ \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\ 2)\ \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \end{cases}$$

e) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A \cup B)$

f) $\mathcal{P}(A \cap B) \cap \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A)$

Observaciones:

1) Si $\left\{\begin{array}{l} i)\ A\cup B=\phi \\ \quad ó \\ ii)\ A\cap B\neq\phi \text{ , siendo } A\not\subset B\ \wedge\ B\not\subset A \end{array}\right\}$ entonces se cumple $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A\cup B)$

2) Si $(A\subset B$ ó $B\subset A)\Rightarrow \mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A\cup B)$

2.36 CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO
(Ó NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO)

2.36.1 *Definición:*

Entendemos por **CARDINALIDAD** de un conjunto, al número de elementos distintos que forman dicho conjunto.

2.36.2 *Notación:*

$Card(A)$: se lee **"el cardinal del conjunto *A*"**

$n(A)$: se lee "el número de elementos del conjunto *A*"

<u>Ejemplos</u>:
Sean los conjuntos $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,5,1,5,1\}$, $C=\phi$
Se tiene: $n(A)=3$, $n(B)=2$, $n(C)=0$

NOTA:
Según la definición de cardinalidad de un conjunto *A*, se tiene que $Card(A)$ es un número natural.

2.36.3 AXIOMAS

N_1) $n(A)\geq 0$ "el número de elementos de cualquier conjunto *A* es positivo o cero"

N_2) Si $A=\phi$, entonces $n(A)=0$

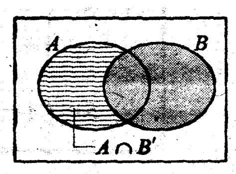
N_3) Si *A* y *B* son conjuntos finitos y disjuntos $(A\cap B=\phi)$, entonces:
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

2.36.4 TEOREMA:

Si A y B son dos conjuntos finitos, tal que $A \cap B \neq \phi$, entonces

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Demostración:

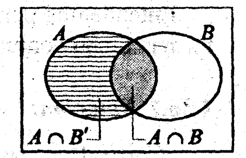


1) Particionar el conjunto $A \cup B$:

$A \cup B = A \cap B' + B$, pues $A \cap B$ y B son disjuntos que al unirlos resulta $A \cup B$.

2) **Por N_3, tenemos:** $n(A \cup B) = \underline{n(A \cap B')} + n(B)$

3) Particionar el conjunto A: $A = A \cap B' + A \cap B$



4) Aplicar N_3: $n(A) = n(A \cap B') + n(A \cap B)$, pues los conjuntos $A \cap B'$ y $A \cap B$ son disjuntos que al unirlos resulta A.

$\underline{n(A \cap B')} = n(A) - n(A \cap B)$

5) Reemplazar en 2) $n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B)$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

2.36.5 COROLARIO

Si A, B, C son conjuntos finitos, tal que $A \cap B \cap C \neq \phi$, entonces:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Demostración:

1) $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C))$

2) $= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C))$

3) $= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

4) $-[n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))$

5) $-n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

6) $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

En general: Si se tiene k conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ tal que $\bigcap_{i=1} A_i \neq \phi$, entonces:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} n(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k \\ i \neq j \neq k}} n(A_i \cap A_j \cap A_k) +$$

$$\ldots + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

2.36.6 TEOREMA

Si el número de elementos de un conjunto A es "k", $k \in I\!N$, entonces el número de elementos del conjunto potencia de A es 2^k.

Es decir, si $n(A) = k \Rightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^k$.

Comprobemos con algunos valores de k.

1) Si $k = 0$, se tiene $A = \phi$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\phi\}$; luego $n(\mathcal{P}(A) = 2^0 = 1$.

2) Si $k = 1$, se tiene $A = \{a_1\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A\}$; luego $n(\mathcal{P}(A)) = 2^1 = 2$

3) Si $k = 2$, se tiene $A = \{a_1, a_2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$, donde $n(\mathcal{P}(A)) = 2^2$

4) Si $k = 3$, se tiene $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\underset{\downarrow}{\phi}, \underbrace{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}}, \underbrace{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}}, \underset{\downarrow}{A}\}$$

$$2^3 = C_0^3 + C_1^3 + C_2^3 + C_3^3$$

La demostración es por inducción matemática, que consiste:

1° Verificar que se cumple para un valor fijo de k, digamos $k = 2$ (ver 2)

2° Si, al suponer que, para $k = h$ se cumple, implica que para $k = h + 1$ también se cumple, entonces se afirma que para todo $n \in I\!N$ se cumple. Veamos:

1. Para $k = 2$, ver 2)
2. Si $k = h$ $\qquad 2^h = C_0^h + C_1^h + C_2^h + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_h^h$
3. Si $k = h + 1$, $\mathcal{P}(A)$ tiene: $C_0^{h+1} + C_1^{h+1} + C_2^{h+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_h^{h+1} + C_{h+1}^{h+1}$

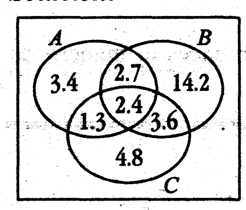
$$2^{h+1} = 2 \cdot 2^h = C_0^h + C_0^h + C_1^h + C_1^h + C_2^h + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{h-1}^h + C_h^h + C_h^h$$

2.37 Problemas Resueltos:

01 Un investigador de mercados efectúa una muestra sobre los hábitos de lectura de revistas de la ciudad de Lima, con los siguientes resultados: 9.8% leen OIGA, 22.9% leen SELECCIONES, 12.1% leen CARETAS, 5.1% leen OIGA y SELECCIONES, 3.7% leen OIGA y CARETAS, 6% leen SELECCIONES y CARETAS, 32.4% leen al menos una de las revistas mencionadas. Calcular el porcentaje de personas que:

a) No leen ninguna de las revistas citadas.
b) Leen exactamente dos de las revistas.

Solución:



A : leen OIGA
B : leen SELECCIONES
C : leen CARETAS

Sean: $n(A) = 9.8\%$ leen OIGA
$n(B) = 22.9\%$ leen SELECCIONES
$n(C) = 12.1\%$ leen CARETAS
$n(A \cap B) = 5.1\%$ leen OIGA y SELECCIONES
$n(A \cap C) = 3.7\%$ leen OIGA y CARETAS
$n(B \cap C) = 6\%$ leen SELECCIONES y CARETAS
$n(A \cup B \cup C) = 32.4\%$ leen al menos una de las revistas mencionadas.

Pero:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad 32.4 = 9.8 + 22.9 + 12.1 - 5.1 - 3.7 - 6 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad n(A \cap B \cap C) = 32.4 - 30$$

$$= 2.4$$

Por tanto: a) $100\% - 32.4\% = 67.6\%$ no leen ninguna de las revistas citadas.

b) Leen exactamente dos de las revistas, es:

$$\underbrace{2.7}_{n(ABC')} + \underbrace{3.6}_{n(BCA')} + \underbrace{1.3}_{n(ACB')} = 7.6$$

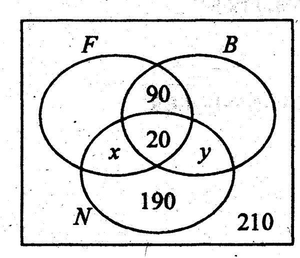
02 La Pontificia Universidad Católica del Perú está organizando las próximas mini olimpiadas en los deportes: fútbol, béisbol y natación. Hay 870 alumnos en la universidad que van a participar en éstas disciplinas deportivas de los cuales:

400	pueden participar en	fútbol
390	" "	béisbol
480	" "	natación
680	" "	fútbol o béisbol.

210 no pueden participar en ninguno de esos deportes.
90 participan en las dos primeros pero no en el tercero.
190 pueden participar solamente en natación.

a) ¿Cuántos alumnos pueden participar en los tres deportes mencionados?
b) ¿Cuántos alumnos pueden participar por lo menos en dos de los deportes?
c) ¿Cuántos alumnos tiene la universidad?

Solución:



Datos:
$$n(F) = 400$$
$$n(B) = 390$$
$$n(N) = 480$$
$$n(F \cup B) = 680$$
$$n(F' \cap B' \cap N') = 210$$
$$n(F \cap B \cap N') = 90$$
$$n(N \cap F' \cap B') = 190$$

Pero
$$n(F \cup B) = n(F) + n(B) - n(F \cap B)$$
$$680 = 400 + 390 - n(F \cap B)$$
$$\Rightarrow n(F \cap B) = 400 + 390 - 680$$
$$= 110$$

a) Por tanto:
$$n(A \cap B \cap C) = n(F \cap B) - n(F \cap B \cap N')$$
$$= 110 - 90$$
$$= 20$$

b) Por lo menos en dos deportes, es la suma de los que práctican en sólo dos deportes más los que practican tres deportes, es decir:

$$n(F \cap B \cap N') + n(B \cap N \cap F') + n(F \cap N \cap B') + n(F \cap B \cap N)$$
$$= 90 + y + x + 20$$

Falta hallar: $x + y = ?$

Pero: $n(N) = x + 20 + y + 190$ .... ver diagrama

$480 = x + y + 210 \;\Rightarrow\; x + y = 270$

Reemplazar en b) $90 + 270 + 20 = 380$

c) La universidad tiene: $870 + 210 = 1080$ alumnos.

03 En una investigación hecho en un grupo de 100 personas, la cantidad de personas que estudiaban varios idiomas fueron las siguientes:

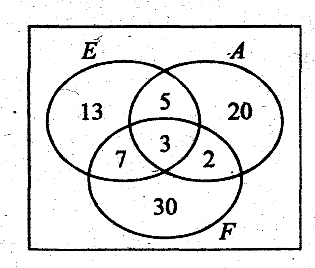
español 28, alemán 30, francés 42,
español y alemán 8,
español y francés 10,
alemán y francés 5, y
los tres idiomas 3.

a) ¿Cuántos alumnos no estudian idiomas?
b) ¿Cuántos alumnos tenían como francés el único idioma de estudios?

Solución:

Para una fácil solución, ilustremos el problema en una digrama de **VENN-EULER**:

La distribución en el diagrama, se hace en el siguiente orden:



1°) $n(E \cap A \cap F) = 3$
2°) $n(A \cap F) = 5$
3°) $n(E \cap F) = 10$
4°) $n(E \cap A) = 8$
5°) $n(F) = 42$
6°) $n(A) = 30$
7°) $n(E) = 28$

Donde:

$$n(E \cup A \cup F) = n(E) + n(A) + n(F) - n(E \cap A) - n(E \cap F) - n(A \cap F) + n(E \cap A \cap F)$$
$$= 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3$$
$$= 80$$

Por lo tanto: a) $100 - 80 = 20$ ⟵ no estudian idiomas

b) $(F\,\bar{E}\,\bar{A}) = 30$ ⟵ sólo fránces

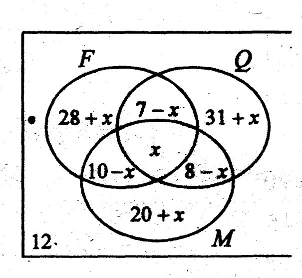
04 En el 1er. año "*E*" del colegio **ALFONSO UGARTE** estudian 120 alumnos, los cuales:

45 aprobaron física
46 " química
38 " matemática
7 " física y química
8 " química y matemática
10 " matemática y física
12 no aprobaron ningún curso

¿Cuántos alumnos aprobaròn los tres cursos?

Solución:

Las distribuciones en el diagrama, se hacen en el siguiente orden:



1) $n(F \cap Q \cap M) = x$
2) $n(M \cap F) = 10$
3) $n(Q \cap M) = 8$
4) $n(F \cap Q) = 7$
5) $n(M) = 38$
6) $n(Q) = 46$
7) $n(F) = 45$
8) $n(\bar{F}\bar{Q}\bar{M}) = 12 = n(\overline{F \cup Q \cup M})$

Pero: $n(F \cup Q \cup M) = n(F) + n(Q) + n(M) - n(FQ) - n(FM) - n(QM) + n(FQM)$

Entonces: $108 = 45 + 46 + 38 - 7 - 10 - 8 + x$

$$108 = 104 + x$$

$$108 - 104 = x \iff x = 4$$

Respuesta: **Aprobaron los tres cursos: 4 alumnos.**

05 En una batalla intervinieron 100 hombres, los cuales:

42 fueron heridos en la cabeza
43 " " " el brazo
32 " " " la pierna
8 " " " la pierna y el brazo
5 " " " la cabeza y el brazo
6 " " " la pierna y en la cabeza

Si todos fueron heridos, averiguar cuántos hombres fueron heridos en los tres lugares.

Solución: 2 hombres.

06 En una universidad hay 58 jugadores, de los cuales:

38 juegan fútbol
15 " básquetbol
20 " béisbol
3 " los tres deportes

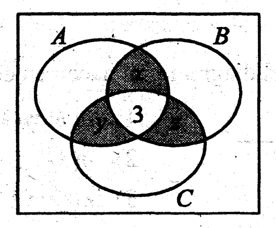
a) ¿Cuántos jugadores figuraban en dos de los tres deportes?

b) ¿Cuántos al menos en dos deportes?

Solución:

Supongamos que:

A : Jugadores de fútbol
B : " " básquetbol
C : " " béisbol



Donde la distribución en orden, debe ser:
1º) $n(A \cap B \cap C) = 3$
2º) $n(C) = 20$
3º) $n(B) = 15$
4º) $n(A) = 38$
5º) $n(A \cup B \cup C) = 58$

Se pide:

a) $n(AB\overline{C}) + n(BC\overline{A}) + n(AC\overline{B}) = x + z + y$: "figuran sólo en dos deportes"

b) $x + y + z + 3$: "al menos en dos deportes"

Pero se sabe que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC)$$

$$58 = 38 + 15 + 20 - (x+3) - (y+3) - (z+3) + 3$$

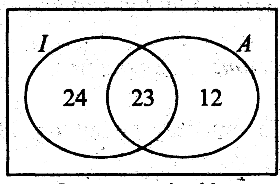
a) $\boxed{x + y + z = 9}$

además: b) $\boxed{x + y + z + 3 = 11}$

67 En un instituto de investigación científico trabajan 67 personas. De éstas, 47 conocen el inglés, 35 el alemán y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas en el Instituto no conocen el inglés ni el alemán?

Solución:

Las distribuciones en orden son:
1º) $n(I \cap A) = 23$
2º) $n(A) = 35$
3º) $n(I) = 47$



I : conocen inglés
A : conocen alemán

Por conocerse: $n(I \cup A)$

Se pide hallar:
$$n(I' \cap A') = n((I \cup A)')$$
$$= n(\Omega) - n(I \cup A)$$
$$= 67 - n(I \cup A)$$

pero: $n(I \cup A) = n(I) + n(A) - n(I \cap A)$

$= 47 + 35 - 23$

$= 59$

Por lo tanto: $67 - n(I \cup A) = 67 - 59$

$= 8$

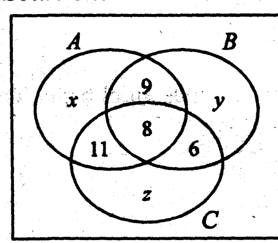
08 100 personas respondieron a un cuestionario formado por 3 preguntas. Cada pregunta debía contestarse por sí o por no y una sóla de estas respuestas es correcta.

Si sabemos que:

a) 8 personas contestaron bien las 3 preguntas
b) 9 " " " sólo la 1ra. y 2da.
c) 11 " " " sólo la 1ra. y la 3ra.
d) 6 " " " sólo la 2da y la 3ra.
e) 55 " " " la 1ra. pregunta por lo menos
f) 32 contestaron a la 2da. por lo menos.
g) 49 respondieron a la 3ra. por lo menos.

¿Cuántas personas no contestaron bien ninguna pregunta?

Solución:



Supongamos que:

A : Respondieron bien la 1ra. pregunta
B : " " " 2da "
C : " " " 3ra "

Las distribuciones en el diagrama, de deben hacerse siguiendo el siguiente orden:

1°) $n(A \cap B \cap C) = 8$

2°) $n(AB\overline{C}) = 9$

3°) $n(AC\overline{B}) = 11$

4°) $n(BC\overline{A}) = 6$

5°) $n(A\overline{B}\overline{C}) + n(AB\overline{C}) + n(AC\overline{B}) + n(ABC) = 55$

$x + 9 + 11 + 8 = 55$

$\Longleftrightarrow x + 28 = 55$

$\Longleftrightarrow x = 27$

6º) $n(B\overline{A}\overline{C})+n(AB\overline{C})+n(BC\overline{A})+n(ABC)=32$

$$y + 9 + 6 + 8 = 32$$
$$y = 9$$

7º) $n(C\overline{A}\overline{B})+n(BC\overline{A})+n(AC\overline{B})+n(ABC)=49$

$$z + 6 + 11 + 8 = 49$$
$$z = 24$$

8º) Entonces: $n(A)=x+9+11+8$

$$=27+9+11+8$$
$$=55$$
$$n(B)=y+9+6+8$$
$$=32$$
$$n(C)=z+11+6+8$$
$$=49$$

9º) Pero: $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(AB)-n(AC)-n(BC)+n(ABC)$

$$= 55 + 32 + 49 - 17 - 19 - 14 + 8$$
$$= 94$$

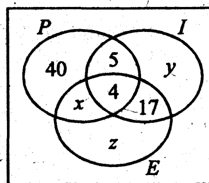
No contestaron bien ninguna pregunta: $100 - 94 = 6$ personas.

09 En la edición de un libro han resultado 120 ejemplares con fallas: fallas en el papel, en la impresión y fallas en la encuadernación. Si se sabe que:

a) 68 libros tienen la 1ra. falla por lo menos.
b) 32 tienen la 2da. falla por lo menos.
c) 40 tienen la 1ra. falla solamente.
d) 5 tienen la 1ra. y 2da. pero no la 3ra.
e) 17 tienen la 2da. y 3ra. falla pero no la 1ra.
f) 4 tienen las 3 fallas.

¿Cuántos libros tienen sólo la 3ra. falla?. ¿Cuántos tienen la 3ra. falla por lo menos?

***Solución*:**



Supongamos que:

P : conjunto de libros con falla en el papel.

I : conjunto de libros con falla en la impresión.

E : conjunto de libros con falla en la encuadernación.

La distribución de los datos en el siguiente diagrama, en orden, es:

1°) $n(P\,I\,E) = 4$

2°) $n(I\,E\,\overline{P}) = 17$

3°) $n(P\,I\,\overline{E}) = 5$

4°) $n(P\,\overline{I}\,\overline{E}) = 40$

5°) $n(I) = 32 = n(I\,\overline{P}\,\overline{E}) + n(P\,I\,\overline{E}) + n(I\,E\,\overline{P}) + n(P\,I\,E)$

6°) $n(P) = 68 = n(P\,\overline{I}\,\overline{E}) + n(P\,I\,\overline{E}) + n(P\,E\,\overline{I}) + n(P\,I\,E)$

Se pide hallar: $n(E\,\overline{P}\,\overline{I}) = z$ $\longrightarrow$ *Libros que tienen sólo la 3ª falla.*

y $n(E) = x + z + 4 + 17$ $\longrightarrow$ *Libros que tienen la 3ª falla por lo menos.*

Veamos:

Mirando el diagrama tenemos: $n(P) = x + 40 + 5 + 4$

$$68 = x + 49$$

$$x = 19$$

Además:

$$n(I) = y + 17 + 4 + 5$$

$$32 = y + 26$$

$$y = 6$$

Pero:

$$n(P \cup I \cup E) = (x + 40 + 5 + 4) + (y + 17) + (z)$$

$$120 = (19 + 40 + 5 + 4) + (6 + 17) + z$$

$$120 = 68 + 23 + z$$

$29 = z$ $\longleftarrow$ *N° de libros que tienen sólo la 3ra. falla.*

Por lo tanto:

$$n(E) = x + z + 4 + 17$$

$$= 19 + 29 + 4 + 17$$

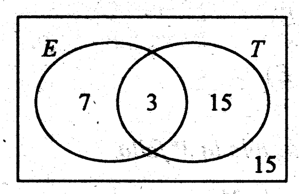
$= 69$ $\longleftarrow$ *N° de libros que tienen la 3ra. falla por lo menos.*

10 En un conjunto que forman 40 personas, hay algunos que estudian o trabajan y otras que ni estudian ni trabajan.

Si hay:
a) 15 personas que no estudian ni trabajan.
b) 10 personas que estudian.
c) 3 personas que estudian y trabajan.

¿Cuántos trabajan?, ¿cuántos sólo trabajan?, ¿cuántos sólo estudian?

***Solución*:**



Supongamos que:

E : conjunto de personas que estudian.
T : conjunto de personas que trabajan.

Entonces la distribución en el diagrama es:

1°) $n(ET)=3$ $\quad ET=E\cap T$

2°) $n(E)=10$ $\quad \bar{E}\bar{T}=E'\cap T'=(E\cup T)'$

3°) $n(\bar{E}\bar{T})=15$ ⟵ *N° de personas que no estudian ni trabajan.*

Por los datos conocidos, podemos deducir que:

$$\underbrace{n(E'\cap T')}_{15}=n((E\cup T)')=\underbrace{n(\Omega)}_{40}-\underline{\underline{n(E\cup T)}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{n(E\cup T)}}=n(\Omega)-n(E'\cap T') \qquad n(\Omega)=40 \text{ total de personas}$$

$$=40-15$$

$$=25$$

Pero: $n(E\cup T)=n(E)+n(T)-n(ET)$

$$25=10+n(T)-3$$

$$n(T)=18$$

Por lo tanto:

a) $n(T)=18$ ⟵ *n° de personas que trabajan.*

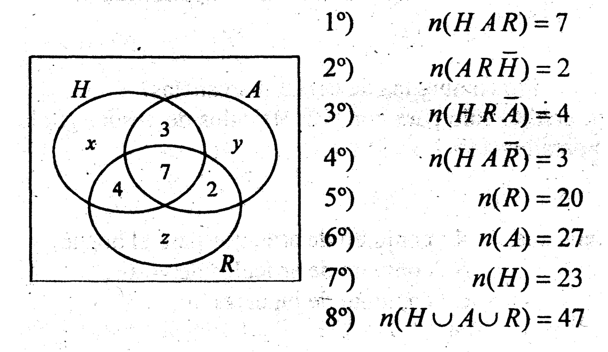
b) $n(T\bar{E})=15$ ⟵ *n° de personas que sólo trabajan.*

c) $n(E\bar{T})=17$ ⟵ *n° de personas que sólo estudian.*

11 La **TOYOTA** del **PERÚ**, vendió 47 automóviles antes de la devaluación del mes de julio, 23 de ellos tenían dirección hidráulica; 27 eran de cambios automáticos; 20 tenían radio; 7 con dirección hidráulica, cambios automáticos y radio; 2 tenían cambios automáticos y radio pero no dirección hidráulica; 3 eran con dirección hidráulica, cambios automáticos y sin radio; 4 tenían dirección hidraúlica y radio pero no dirección hidraúlica. ¿Cuántos automóviles se vendieron con solamente uno de éstos accesorios?

Solución:

La distribución de los datos sobre el diagrama, debe seguir el siguiente orden:



1º) $n(HAR)=7$

2º) $n(AR\overline{H})=2$

3º) $n(HR\overline{A})=4$

4º) $n(HA\overline{R})=3$

5º) $n(R)=20$

6º) $n(A)=27$

7º) $n(H)=23$

8º) $n(H\cup A\cup R)=47$

Se pide hallar: $n(H\overline{A}\,\overline{R})+n(A\overline{H}\,\overline{R})+n(R\overline{H}\,\overline{A})$

$$= \quad x \quad + \quad y \quad + \quad z$$

Si miramos el diagrama, nos daremos cuenta que:

$$n(H\cup A\cup R)=(4+x+3+7)+(y+z)+2$$
$$47=x+y+z+16$$
$$31=x+y+z$$

NOTA:
No es la única forma de resolver, intente resolver de otra manera.

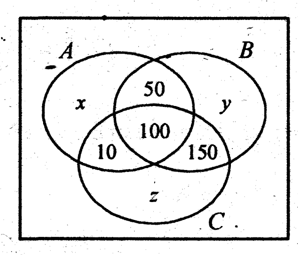
12 El departamento de publicidad de **SAGA** efectúa una encuesta a un grupo seleccionado de 1,000 clientes, de entre todos los que abrieron su cuenta de crédito en el mes pasado de diciembre. Se les pregunta si su crédito fue utilizado para comprar artículos para el hogar, artículos de vestir o juguetes. Los resultados de la encuesta se han tabulado así:

MERCANCÍA	Nº DE PERSONAS
Artículos para el hogar	275
Artículos de vestir	400
Juguetes	550
Artículos para el hogar y de vestir	150
Artículos para el hogar y juguetes	110
Artículos de vestir y juguetes	250
Artículos de vestir, del hogar y juguetes	100

Se pregunta:

a) ¿Cuántas personas no usaron su crédito en ninguna de esas 3 mercancías?
b) ¿Cuántas personas utilizaron su crédito sólo para comprar artículos de vestir? ¿Sólo para artículos del hogar? ¿Sólo para juguetes?

***Solución*:**



Supongamos que: A : conjunto de artículos para el hogar.
B : conjunto de artículos de vestir.
C : conjunto de juguetes

La distribución en el diagrama es:
1º) $n(ABC) = 100$
2º) $n(BC) = 250$
3º) $n(AC) = 110$
4º) $n(AB) = 150$
5º) $n(C) = 550$
6º) $n(B) = 400$
7º) $n(A) = 275$

Se pide hallar:

a) $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1{,}000 - n(A \cup B \cup C)$

b) *i*) $n(B\,\overline{A}\,\overline{C}) = y$ $\longleftarrow$ *Sólo para comprar artículos de vestir.*

ii) $n(A\,\overline{B}\,\overline{C}) = x$ $\longleftarrow$ *Sólo para artículos del hogar.*

iii) $n(C\,\overline{A}\,\overline{B}) = z$ $\longleftarrow$ *Sólo para juguetes.*

Pero: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(AB) - n(AC) - n(BC) + n(ABC)$

$= 275 + 400 + 550 - 150 - 110 - 250 + 100$

$= 815$

Entonces: a) $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1{,}000 - 815 = 185$

Además b)
$$\begin{cases} i)\ n(A) = x + 50 + 100 + 10 \\ \quad 275 = x + 160 \\ \quad 115 = x \\ ii)\ n(B) = y + 150 + 100 + 50 \\ \quad 400 = y + 300 \\ \quad 100 = y \\ iii)\ n(C) = z + 10 + 100 + 150 \\ \quad 550 = z + 260 \\ \quad 290 = z \end{cases}$$

13 En una encuesta realizada por la "*Panificadora Rodríguez*", se entrevistaron a 900 amas de casa sobe su preferencia en los tres productos que fabrica. Se obtuvieron los siguientes datos:

130 personas compran únicamente pan francés.
88 personas compran únicamente pan de maíz.
32 personas compran únicamente pan mantecado.
144 personas compran pan francés y pan de maíz exclusivamente.
86 personas compran pan de maíz y mantecado exclusivamente.
90 personas compran exclusivamente pan francés y mantecado.
205 personas compran los tres productos.

Se pregunta:

a) ¿Cuántas personas consumen al menos pan francés o pan de maíz?
b) ¿Cuántas personas no consumen los productos que fabrica esta panificadora?

Solución:

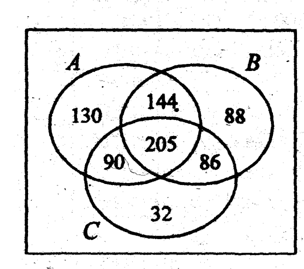
Supongamos que:

A : conjunto de pan francés.

B : conjunto de pan de maíz.

C : conjunto de pan mantecado.

La distribución en el diagrama, es:



1º) $n(ABC) = 205$

2º) $n(AC\overline{B}) = 90$

3º) $n(BC\overline{A}) = 86$

4º) $n(AB\overline{C}) = 144$

5º) $n(C\overline{A}\,\overline{B}) = 32$

6º) $n(B\overline{A}\,\overline{C}) = 88$

7º) $n(A\overline{B}\,\overline{C}) = 130$

Se pide hallar: a) $n(A \cup B)$

b) $900 - n(A \cup B \cup C) = n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$

Mirando el diagrama tendremos:

a) $$n(A \cup B) = (130 + 144 + 205 + 90) + (88 + 86)$$
$$= 743$$

b) $$n(A \cup B \cup C) = (130 + 144 + 205 + 90) + (88 + 86) + (32)$$
$$= 775$$

Por lo tanto: $n(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 900 - 775 = 125$

PROBLEMAS

01. Si A, B y C son conjuntos no disjuntos dos a dos, deducir la fórmula que nos da el número de elementos de $(A \Delta B) \Delta C$.

02. Deducir la fórmula para determinar el número de elementos del conjunto $A \Delta B$

03. Si A es un conjunto que tiene $8z$ elementos, B es un conjunto con $5z$ elementos, los dos conjuntos tienen en común $2z-1$ elementos y se sabe que $n(A \cup B) = 56$, hallar el total de subconjuntos de $(A \cup B) \cap (B \cap A')$.

04. De 30 alumnos de una clase, 18 han aprobado Física y 23 Química y 5 ninguno de los dos cursos. ¿Cuántos alumnos han aprobado sólo uno de los dos cursos?

05. Considere el experimento de lanzar dos dados comunes. Cada resultado del experimento se designa por un par ordenado (x, y), donde x e y pueden tomar valores de 1 a 6.

Si U es el universo de todos los resultados posibles del experimento y:

$$A = \{(x,y) \in U / x + y \leq 4\}$$

$$B = \{(x,y) \in U / 4 < x + y \leq 6\}$$

Calcular el valor de k, si $k = \frac{n(A \cup B)}{n(U)}$

06. Treinta autos fueron ensamblados en una factoría. Las opciones ventajosas fueron un radio, aire acondicionado y juego de llantas adicionales. Se sabe que 15 de los autos tienen radio, 8 de ellos tienen aire acondicionado y 6 de ellos tienen un juego de llantas adicional; además, tres de ellos tienen las tres opciones.

¿Cuántos autos al menos no tienen ninguna de las opciones?

Rpta.: 7.

07. En una encuesta entre los alumnos de la universidad, se obtuvieron los siguientes resultados:

El 55% de los encuestados aprobaron Química.
El 30% de los encuestados aprobaron Matemática.
El 50% de los encuestados aprobaron Lengua.
El 10% de los encuestados aprobaron los tres cursos.
El 40% de los que aprobaron Química no aprobaron ningún otro curso y el 20% de

los que aprobaron Química también aprobaron Matemática pero no Lengua.

El 14% de los encuestados no aprobó ninguno de los tres cursos.
Si se sabe que 256 de los encuestados aprobaron Matemática y Lengua, determinar:

a) ¿Cuántos aprobaron los tres cursos?
b) ¿Cuántos aprobaron Matemática o Lengua pero no Química?

08. El número de personas que toman la bebida A es 190.
El número de personas que toman la bebida B es 110.
El número de personas que toman la bebida C es 150.
El número de personas que sólo toman C es la mitad de las que sólo toman B y 1/3 de los que sólo toman A.

El número de personas que sólo toman B y C es la mitad de los que sólo toman A y B. Si el número de personas que toman las 3 bebidas es 1/3 de los que sólo toman A y C. ¿Cuántas personas toman una bebida solamente?

09. María tiene los siguientes datos al comprar garbanzo, maíz y trigo:

El costo total de garbanzo es	22 dólares.
El costo total de maíz es	20 dólares
El costo total de trigo es	38 dólares.

Pero al recoger estos productos se mezclaron y se obtuvieron los siguientes datos:

El costo de sólo garbanzo es 1/2 del costo de sólo maíz y 1/3 del costo de sólo trigo.
Solo la mezcla de trigo y maíz costó el doble de sólo maíz y garbanzo mezclado.
La mezcla de los 3 productos costó 1/5 de solo el garbanzo y trigo mezclado.
¿Cuál es el costo de los productos no mezclados?

Rpta.: Sólo garbanzo: 6 ; sólo maíz: 12 ; sólo trigo: 18.

10. Si en una encuesta a 200 estudiantes se halló que:

68	prefieren matemáticas,
138	son inteligentes,
160	son estudiosos,
120	son estudiosos e inteligentes,
20	prefieren matemáticas y no son inteligentes,
13	prefieren matemáticas y no son estudiosos y
15	prefieren matemáticas y son estudiosos pero no so inteligentes.

Utilizando diagramas de Venn, resolver lo siguiente:

a) ¿Cuántos prefieren matemáticas, son estudiosos y son inteligentes?
b) ¿Cuántos son estudiosos e inteligentes pero no prefieren matemáticas?
c) ¿Cuántos no prefieren matemáticas, ni son estudiosos, ni son inteligentes?

2.38 MISCELÁNEA DE PROBLEMAS RESUELTOS

Relaciones de **INCLUSIÓN**, **IGUALDAD**. Complemento. **OPERACIONES** de intersección, unión, diferencia.

01 Usando propiedades demostrar que:

Si $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C) \Rightarrow \underbrace{A\subset(B\cup C)}_{I} \wedge \underbrace{(A-C)\subset B}_{II}$

Prueba:

Basado en la propiedad: $M\subset N \Longleftrightarrow M\cap N'=\phi$, debo probar $(I)\wedge(II)$.

1. Se cumplirá (I), si pruebo que $A\cap(B\cap C)'=\phi$

Veamos:

2. Por hipótesis: $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C)$

3. Pero: $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C) \Longleftrightarrow (A-B)\cap(B\,\Delta\,C)'=\phi$

4. Reducir: $(A-B)\subset(B\,\Delta\,C)'$

$$= (A\cap B')\cap[(B\cup C)\cap(B\cap C)']'$$

$$= (A\cap B')\cap[(B\cup C)'\cup(B\cap C)]$$

$$= (A\cap B')\cap[(B'\cap C')\cup(B\cap C)]$$

$$= (A\cap B')\cap\{[(B'\cap C')\cup B]\cap[(B'\cap C')\cup C]\}$$

$$= (A\cap B')\cap\{[\underbrace{(B'\cup B)}_{\Omega}\cap(C'\cup B)]\cap[(B'\cup C)\cap\underbrace{(C'\cup C)}_{\Omega}]\}$$

$$= (A\cap B')\cap\{(C'\cup B)\cap(B'\cup C)\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4*$$

$$= \{(A\cap B')\cap(C'\cup B)\}\cap(B'\cup C)$$

$$= \{A\cap[B'\cap(C'\cup B)]\}\cap(B'\cup C)$$

$$= \{A\cap(B'\cap C')\}\cap(B'\cup C)$$

$$= A\cap\{(B'\cap C')\cap(B'\cup C)\}$$

Forma más sencilla:

$$(A\cap B')\cap[(B'\cap C')\cup(B\cup C)]$$

$$\underbrace{[(A\cap B')\cap(B'\cap C')]}_{(A\cap B'\cap C')}\cup\underbrace{[(A\cap B')\cap(B\cap C)]}_{\phi}$$

$$A\cap B'\cap C'$$

$$= A \cap \{[(B' \cap C') \cap B'] \cup [\underbrace{(B' \cap C') \cap C}_{\phi}]\}$$

$$= A \cap \{[B' \cap C'] \cup \phi\}$$

$$= A \cap (B' \cap C') \text{ .... } (4^{**})$$

$$= A \cap (B \cup C)'$$

5. Por 3. $A \cap (B \cup C)' = \phi \Rightarrow A \subset B \cup C$

   Para probar que $(A - C) \subset B$, debo verificar que $(A - C) \cap B' = \phi$

Veamos:

6. Al partir de la hipótesis en 4. obtuvimos que:

$$(A - B) \subset (B \Delta C) \iff (A - B) \cap (B \Delta C)' = \phi$$
$$\iff A \cap (B' \cap C') = \phi \text{ .... por } (4^{**})$$
$$\iff (A \cap C') \cap B' = \phi$$
$$\iff (A - C) \cap B' = \phi$$
$$\Rightarrow (A - C) \subset B$$

NOTA:
En el paso (4*) podemos aplicar la propiedad de absorción.

Así: $(A \cap B') \cap \{(C' \cup B) \cap (B' \cup C)\}$ 4*

$$= [A \cap (C' \cup B)] \cap [\underbrace{B' \cap (B' \cup C)}_{B'}] \text{ .... Prop. asociativa}$$

$$= [A \cap (C' \cup B)] \cap B'$$

$$= A \cap [(C' \cup B) \cap B']$$

$$= A \cap [(C' \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}] = A \cap [C' \cap B'] = A \cap C' \cap B'$$

02 Simplificar, aplicando propiedades:

$[(A\cap B)\cup(\mathcal{C}C\cup\mathcal{C}D\cup\mathcal{C}E)]\cap[(A\cap B)\cup(C\cap D\cap E)]$

***Solución*:**

$[(A\cap B)\cup(C'\cup D'\cup E')]\cap[(A\cap B)\cup(C\cap D\cap E)]=$

$=(A\cap B)\cup[(C'\cup D'\cup E')\cap(C\cap D\cap E)]$

$=(A\cap B)\cup[\underbrace{(C\cap D\cap E)'\cap(C\cap D\cap E)}]$

$=(A\cap B)\cup\phi=A\cap B$

03 Si $\mathcal{C}_B A=B-A$, simplificar $[(A'-B)'-(B-A')]\cup[(A'\cap B')\cup(A-B')]$

***Solución*:**

1. Si $\mathcal{C}_B A=B-A$, entonces $\mathcal{C}_B A\subset B$
2. *A* simplificar:

$[(A'-B)'-(B-A')]\cup[(A'\cap B')\cup(A-B')]=$

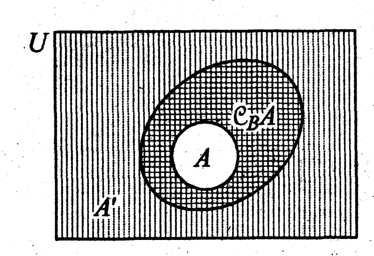
$=[(A'\cap B')'\cap(B\cap A)']\cup[(A'\cap B')\cup(A\cap B)]$

$=[\underbrace{(A\cup B)}_{B}\cap\underbrace{(B\cap A)'}_{A}]\cup[\underbrace{(A\cup B)'}_{B}\cup\underbrace{(A\cap B)}_{A}]$

$=[B\cap A']\cup[B'\cup A]$

$=(B-A)\cup(B\cap A')'$

$=(B-A)\cup(B-A)'=(\mathcal{C}_B A)\cup(\mathcal{C}_B A)'=U$



$A\subset B$

$A\cap B=A$

$A\cup B=B$

$A\cup\mathcal{C}_B A=B$

$A\cap\mathcal{C}_B A=\phi$

$A'=U-A$

$B'=U-B$

04 Usando propiedades de conjuntos, demostrar que:

$(A \cup B) \cap \complement B = A \iff A \cap B = \phi$

($\Rightarrow$) Hipótesis: $(A \cup B) \cap \complement B = A$ implica que $A \cap B = \phi$

Veamos:

1) Partimos de $A \cap B$.

2) Por hipótesis: $A = (A \cup B) \cap \complement B$

3) Reemplazar 2) en 1).

$$A \cap B = [(A \cup B) \cap \complement B] \cap B = (A \cup B) \cap [\underbrace{\complement B \cap B}_{\phi}]$$

$$= (A \cup B) \cap \phi = \phi$$

$\Rightarrow \quad A \cap B = \phi$

($\Leftarrow$) Hipótesis: $A \cap B = \phi$ implica que $(A \cup B) \cap \complement B = A$

Veamos:

1. Partimos de $(A \cup B) \cap \complement B$

2. Aplicando propiedad distributiva:

$$(A \cup B) \cap \complement B = (A \cap \complement B) \cup (\underbrace{B \cap \complement B}_{})$$

$$= (A \cap \complement B) \cup \underbrace{\phi}_{}$$

3. Por hipótesis $\phi = A \cap B \Rightarrow$

$$= (A \cap \complement B) \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap (\underbrace{\complement B \cup B}_{})$$

$$= A \cap U$$

$$= A$$

OTRA FORMA

$\to (A \cap \complement B) \cup \phi = A \cap \complement B$

Pero: $A \cap B = \phi$

$A \cap (B')' = \phi$

esto implica: $A \subset B'$

Por tanto: $A \cap B' = A$

U = conjunto universal

05 Probar que: $(A \cap C) \cap (B' \cup C') = (A \cap C) \cap B'$

<u>**Prueba**</u>:

1. $(A \cap C) \cap (B' \cup C') = [(A \cap C) \cap B'] \cup [(A \cap C) \cap C']$

$$= [(A \cap C) \cap B'] \cup \underbrace{[A \cap (\underbrace{C \cap C'}_{\phi})]}_{\phi}$$

$$= (A \cap C) \cap B'$$

06 Probar que: $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

Prueba:

Partiré del 1er. miembro para llegar al 2do. miembro.

$(A \Delta B) \cap C = C \cap (A \Delta B)$ .... Propiedad conmutativa de la $\cap$

$= C \cap [(A \cap B') \cup (B \cap A')]$

$= [C \cap (A \cap B')] \cup [C \cap (B \cap A')]$

Pero: $\begin{cases} (A \cap C) \cap B' = (A \cap C) \cap (B' \cup C') \\ (B \cap C) \cap A' = (B \cap C) \cap (A' \cup C') \end{cases}$

$= [(A \cap C) \cap B'] \cup [(B \cap C) \cap A']$

$= [(A \cap C) \cap (B' \cup C')] \cup [(B \cap C) \cap (A' \cup C')]$

$= [(A \cap C) \cap (B \cap C)'] \cup [(B \cap C) \cap (A \cap C)']$

$= [(A \cap C) - (B \cap C)] \cup [(B \cap C) - (A \cap C)]$

$= (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

07 Sean A, B, C conjuntos no vacíos diferentes dos a dos tales que:

$\complement B \subset \complement A \quad ; \quad C \cap \complement B = \phi \quad ; \quad A \cap \complement C = \phi$

Simplificar: $[B \cap (C - A)] \cap [A \cap (B - C)]$

***Solución*:**

1. Si $\complement B \subset \complement A \Rightarrow \boxed{A \subset B}$ → $A \cap B = A$; $A \cup B = B$
2. Si $\boxed{C \cap \complement B = \phi \Rightarrow C \subset B}$ → $C \cap B = C$; $C \cup B = B$
3. Si $A \cap \complement C = \phi \Rightarrow A \subset C$ → $A \cap C = A$; $A \cup C = C$

De 1, 2 y 3: $A \subset C \subset B$

4. Simplificar: $[B \cap (C - A)] \cap [A \cup (B - C)]$

$= [B \cap (C \cap A')] \cap [A \cup (B \cap C')]$

$= [(\underbrace{B \cap C}_{C}) \cap A'] \cap [(\underbrace{A \cup B}_{B}) \cap (A \cup C')]$

$= [\underline{C \cap} A'] \cap [\underline{B \cap}(A \cup C')]$

$= (C \cap B) \cap [A' \cap (A \cup C')]$ propiedad asociativa de la intersección.

$= \quad C \quad \cap [(A' \cap A) \cup (A' \cap C')] = C \cap (A' \cap C')$

$\underbrace{(A' \cap A)}_{\phi}$ $\quad = C \cap (\underbrace{A \cup C}_{C})'$

$= \quad A' \cap C'$

$= C \cap C' = \phi$

CONCLUSIÓN: $[B \cap (C - A)] \cap [A \cup (B - C)] = \phi$

08 Usando propiedades de conjuntos, hallar $R \cup S$, si:

$R = \mathcal{C}[A - (B - D)] \cap [\mathcal{C}A \,\Delta\, (B - D)]$

$S = [(B - A) \cup (D - A)] \cup [A \cup (B \,\Delta\, D)]$

***Solución*:**

1. Simplificar R.

$R = \mathcal{C}[A - \underbrace{(B - D)}_{M}] \cap [\mathcal{C}A \,\Delta\, \underbrace{(B - D)}_{M}]$, hacer $B - D = M$

$= \mathcal{C}[A - M] \cap [\mathcal{C}A \,\Delta\, M]$

$= \mathcal{C}[A \cap \mathcal{C}M] \cap [(\mathcal{C}A \cup M) - (\mathcal{C}A \cap M)]$ .... Definición de **DIFERENCIA SIMÉTRICA**

$[(\mathcal{C}A \cup M)] \cap [(\mathcal{C}A \cup M) \cap \mathcal{C}(\mathcal{C}A \cap M)]$

$= (\mathcal{C}A \cup M) \cap \mathcal{C}(\mathcal{C}A \cap M)$

$= (\mathcal{C}A \cup M) \cap (A \cup \mathcal{C}M)$

$= [(\mathcal{C}A \cup M) \cap A] \cup [(\mathcal{C}A \cup M) \cap \mathcal{C}M]$

$= [\underbrace{(\mathcal{C}A \cap A)}_{\phi} \cup (M \cap A)] \cup [\underbrace{(\mathcal{C}A \cap \mathcal{C}M)}_{\mathcal{C}(A \cup M)} \cup \underbrace{(M \cap \mathcal{C}M)}_{\phi}]$

2. $(A \cap M) \cup \mathcal{C}(A \cup M) = \mathcal{C}[\underbrace{\mathcal{C}(A \cap M) \cap (A \cup M)}_{A \cup M \,-\, A \cap M}]$

$= \mathcal{C}[A \,\Delta\, M] = \mathcal{C}[A \,\Delta\, (B - D)]$

3. De 2: $(A\cap M)\cup\mathcal{C}(A\cup M)=$

$= [A\cap(B-D)]\cup[\mathcal{C}A\cap\mathcal{C}M]$

$=$ " $\cup[\mathcal{C}A\cap\mathcal{C}(B-D)]$

$=$ " $\cup[\mathcal{C}A\cap\mathcal{C}(B\cap\mathcal{C}D)]$

$=$ " $\cup[\mathcal{C}A\cap(\mathcal{C}B\cup D)]$

$=$ " $\cup(\mathcal{C}A\cap\mathcal{C}B)\cup(\mathcal{C}A\cap D)$

$= [A\cap(B-D)]\cup\mathcal{C}(A\cup B)\cup(D-A)$

***Simplificar S*:**

$S = [(B-A)\cup(D-A)]\cup[A\cup(B\,\Delta\,D)]$

$= [(B-A)\cup(D-A)]\cup[$ " $]$

$=[(B\cap A')\cup(D\cap A')]\cup[$ " $]$

$=[(B\cup D)\cap A']\cup[A\cup(B\,\Delta\,D)]$

$=\{[(B\cup D)\cap A']\cup A\}\cup(B\,\Delta\,D)$

$=(B\cup D\cup A)\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{\Omega}\cup(B\,\Delta\,D)$, Ω = conjunto universal.

$=(B\cup D\cup A)\cup(B\,\Delta\,D)$

$=A\cup B\cup D$, pues $B\,\Delta\,D\subset(B\cup D\cup A)$

Hallar $R\cup S$

$R\cup S=[A\cap(B-D)]\cup\mathcal{C}(A\cup D)\cup(D-A)\cup(A\cup B\cup D)=\Omega$

es el universo

$=\Omega\cup$(cualquier conjunto) $=\Omega$, pues el universo unido con otros conjuntos resulta el universo.

09 Reducir la expresión:

$\{[(A\cup B')\cap(A\cap B)]\cup(A\cap B')\}\cup(C-A)=$

$=[(A\cup B')\cap(A\cap B)]\cup\{(A\cap B')\cup(C\cap A')\}$ ...... P. Asociativa

$=[(\underbrace{(A\cup B')\cap A}_{A})\cap B]\cup$ " .... Prop. Absorción

$=(A\cap B)\cup\{(A\cap B')\cup(C\cap A')\}$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B')\}\cup(C\cap A')$ .... P. Asociativa

$=\{\underbrace{A\cap\underbrace{(B\cup B')}_{\Omega}}_{A}\}\cup(C\cap A')$

$=A\cup(C\cap A')=(A\cup C)\cap(\underbrace{A\cup A'}_{\Omega})=A\cup C$

10 Demostrar que: $(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)=(A\,\Delta\,B)\cup(B\,\Delta\,C)$

Demostración:

Partiré del 2do. miembro y llegar a la expresión del 1er. miembro:

$(A\,\Delta\,B)\cup(B\,\Delta\,C)=$

$=[(A\cup B)-(A\cap B)]\cup[(B\cup C)-(B\cap C)]$ .... Definición de **DIFERENCIA SIMÉTRICA.**

$=[(A\cup B)\cap(A\cap B)']\cup[(B\cup C)\cap(B\cap C)']$

$=[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup[(B\cup C)\cap(B'\cup C')]$

$=\{[(A\cup B)\cap(A'\cup B')]\cup(B\cup C)\}\cap\{[(A\cup B)\cap(A'\cap B')]\cup(B'\cup C')\}$

$=\{\underbrace{[(A\cup B)\cup(B\cup C)]}_{A\cup B\cup C}\cap\underbrace{[(A'\cup B')\cup(B\cup C)]}_{\Omega}\}\cap\{\underbrace{[(A\cup B)\cup(B'\cup C')]}_{\Omega}\cap\underbrace{[(A'\cup B')\cup(B'\cup C')]}_{A'\cup B'\cup C'}\}$

$=[(A\cup B\cup C)\cap\Omega]\cap[\Omega\cap(A'\cup B'\cup C')]$

$=(A\cup B\cup C)\cap(A'\cup B'\cup C')$

$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)'=(A\cup B\cup C)-(A\cap B\cap C)$

(11) Sean A, B, C subconjuntos del conjunto universal Ω. utilizando propiedades, simplificar: $[A^C-(B^C-C)]^C \cap (C^C-B)^C$.

Solución:

$$[A^C-(B^C-C)]^C \cap (C^C-B)^C = [A^C \cap (B^C \cap C^C)^C]^C \cap (C^C \cap B^C)^C$$
$$= [A \cup (B^C \cap C^C)] \cap (C \cup B)$$
$$= [A \cup (B \cup C)^C] \cap (B \cup C)$$
$$= [A \cap (B \cup C)] \cup [\underbrace{(B \cup C)^C \cap (B \cup C)}_{\phi}]$$
$$= A \cap (B \cup C)$$

(12) Si A, B, C son subconjuntos no vacíos tales que A y C son disjuntos y que $A \cup C = B$; simplificar $A \,\Delta\, B \,\Delta\, A \,\Delta\, C$

Solución:

1. Por datos: $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $C \neq \phi$, $A \cap C \neq \phi$, $A \cup C = B$.
2. Según los datos, el diagrama correspondiente es:
3. Luego: $A \,\Delta\, B \,\Delta\, A \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, A) \,\Delta\, C$

$$= A \,\Delta\, (A \,\Delta\, C) \,\Delta\, C$$ .... Propiedad asociativa y conmutativa de la diferencia simétrica.

$$= \underbrace{(A \,\Delta\, A)}_{\phi} \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$
$$= \phi \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$
$$= B \,\Delta\, C$$
$$= \underbrace{(B \cup C)}_{} - \underbrace{(B \cap C)}_{}$$ .... definición de DIFERENCIA SIMÉTRICA.

$$= \underbrace{A \quad - \quad C}_{}$$, pues $C \subset B$ $\begin{cases} C \cap B = C \\ C \cup B = B \end{cases}$

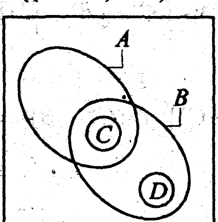
$$= A$$, porque $A \cup C = B$ y $A \cap C = \phi$

B	
A	C

NOTA:

En el diagrama $\overset{B}{\boxed{A|C}}$ se opera como un rompecabezas, esto es lo gracioso y atractivo. Se cumplen: $A + C = B$, $B - C = A$, $B - A = C$.

(13) Se acuerdo al diagrama siguiente, simplificar: $\overline{(A\cup\overline{C})}\cup((\overline{A}\cap D)\cup B)$



Solución:

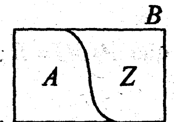
$$\overline{(A\cup\overline{C})}\cup((\overline{A}\cap D)\cup B)=\underbrace{(\overline{A}\cap C)}_{\phi}\cup(\underbrace{(\overline{A}\cap D)}_{D}\cup B)$$

$$=\phi\cup(D\cup B)=D\cup B=B$$

(14) Dados dos conjuntos cualesquiera A y B. Determinar el conjunto Z, expresado en términos de A y B, tal que se cumpla:

$$A\cup Z=A\cup B \quad\wedge\quad A\cap Z\neq\phi$$

Solución:



En este diagrama se cumplen $\begin{cases} A\cap Z=\phi \\ A\cup Z=B=A\cup B \end{cases}$

Luego: $Z=B-A$

(15) Aplicando definiciones, demostrar que: $B\subset A\cup(B-A)$

Demostración:

Debo probar: si $x\in B$ implica que $x\in[A\cup(B-A)] \iff x\in[A\cup(B\cap A')]$

$$\iff x\in[(A\cup B)\cap\underbrace{(A\cup A')}_{\Omega}]$$

Veamos:

1. $\forall x\in B \Rightarrow \underbrace{x\in A}_{p} \vee \underbrace{x\in B}_{q}$ .... (por: $q\rightarrow p\vee q$)

2. $\Rightarrow (x\in A \vee x\in B)\wedge T$ ...... (por: $P\longleftrightarrow P\wedge T$), T= tautología

3. $\Rightarrow (x\in A \vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\notin A)$ .... ($T\equiv p\vee\sim p$)
   $\Rightarrow x\in A\vee[x\in B\wedge x\notin A]$
   $\Rightarrow x\in A\vee[x\in(B-A)]$

4. $\Rightarrow x\in[A\cup(B-A)]$

5. Por 1 y 4: $B\subset[A\cup(B-A)]$

NOTA: Se ha usado, paulatinamente, la siguientes **TAUTOLOGÍAS**.
1) $P\rightarrow p\vee q$
2) $p\vee q\equiv(p\vee q)\wedge T$
$\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee\sim p)$
$\equiv p\vee(q\wedge\sim p)$
3) $p\vee\sim p\equiv T$
$p\equiv x\in A\,,\,q\equiv x\in B$

16 Demostrar mediante elementos, que para los conjuntos A, B, C se verifica:

$$(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]=[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]$$

***Demostración*:**

Debo probar que si

$$x\in\{\underbrace{(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]}_{(I)}\} \iff x\in\{\underbrace{[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]}_{(II)}\}$$

Veamos:

Partiré de II para llegar a I.

1) Si $x\in[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]\}$

$\Rightarrow x\in[A-(B-C)] \wedge x\in[A-(C-B)]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge x\notin(B-C)] \wedge [x\in A\wedge x\notin(C-B)]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)] \wedge [x\in A\wedge(x\notin C\vee x\in B)]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C)] \wedge (x\notin C\vee x\in B)$

$\Rightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\notin C)] \wedge (x\notin C\vee x\in B)$

$\Rightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\notin C\vee x\in B)] \vee [(x\in A\wedge x\in C)\wedge(x\notin C\vee x\in B)]$

$\Rightarrow [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\sim(x\in C\wedge x\notin B)]\vee[(x\in A\wedge x\in C)\wedge x\notin C]\vee[(x\in A\wedge x\in C)\wedge x\in B]$

" $\wedge[x\in A\wedge\underbrace{(x\in C\wedge x\notin C)}_{F}]\vee[(x\in A\wedge x\in C)\wedge x\in B]$

F

" $\vee\ [x\in A\wedge x\in C\wedge x\in B]$

$\Rightarrow [x\in A\wedge x\in B\wedge x\in C] \vee [(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\sim(x\in C\wedge x\notin B)]$

$\Rightarrow x\in(A\cap B\cap C)\vee[x\in(A-B)\wedge x\notin(C-B)]$

$\Rightarrow x\in(A\cap B\cap C) \vee x\in[(A-B)-(C-B)]$

2) $\Rightarrow x\in\{(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]\}$

3) Por 1) y 2) queda probado:

$[A-(B-C)]\cap[A-(C-B)]\subset(A\cap B\cap C)\cup[(A-B)-(C-B)]$

La otra inclusión queda como ejercicio.

(17) Usando definiciones, demostrar que: $A-(B\cap \mathcal{C}A)=A$

Demostración:

Debo probar que: $\forall\, x\in[A-(B\cap \mathcal{C}A)]$ implica $x\in A$

Veamos:

1. $\forall\, x\in[A-(B\cap \mathcal{C}A)] \Rightarrow x\in A \wedge x\notin(B\cap \mathcal{C}A)$

$$\Rightarrow x\in A \wedge [x\notin B \vee x\notin \mathcal{C}A]$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge [x\notin B \vee x\in A]$$

$$\Rightarrow \underbrace{x\in A}_{p} \wedge [\underbrace{x\in A}_{p} \vee \underbrace{x\in \mathcal{C}B}_{p}]$$

$$\Rightarrow p \wedge [p\vee q] \equiv p$$

2. $\Rightarrow \qquad \equiv \overbrace{x\in A}$

3. Por 1 y 2 se cumple: $[A-(B\cap \mathcal{C}A)]\subset A$

4. Ahora, probar la otra inclusión: $A\subset[A-(B\cap \mathcal{C}A)]$ ...... *Queda como ejercicio.*

5. Por 3 y 4, debe ser: $A-(B\cap \mathcal{C}A)=A$.

(18) Demostrar mediante definiciones: $(A\cap B)-(A\cap \mathcal{C}C)=A\cap(B-\mathcal{C}C)$

Prueba:

I) $(\subset)$

$\forall\, x\in[(A\cap B)-(A\cap \mathcal{C}C)]$ debo probar que "$x\in A\cap(B-\mathcal{C}C)$"

Veamos:

1. $\forall\, x\in[(A\cap B)-(A\cap \mathcal{C}C)]$

$\Rightarrow x\in(A\cap B) \wedge x\notin(A\cap \mathcal{C}C)$

$$\Rightarrow x\in(A\cap B) \wedge [x\notin A \vee x\notin \mathcal{C}C]$$

$$\Rightarrow [x\in(A\cap B) \wedge x\notin A] \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\notin \mathcal{C}C]$$

$$\Rightarrow [(\underline{\underline{x\in A}} \wedge x\in B) \wedge \underline{\underline{x\notin A}}] \vee [x\in(A\cap B) \wedge x\in C]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{[\underbrace{(x\in A \wedge x\notin A)}_{F} \wedge x\in B]}_{F} \qquad\qquad\qquad}_{x\in(A\cap B)\ \wedge\ x\in C}$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge (x\in B \wedge \underbrace{x\in C})$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge (x\in B \wedge x\notin \mathcal{C}C)$$

$$\Rightarrow x\in A \wedge x\in(B-\mathcal{C}C)$$

2. $\Rightarrow x\in[A\cap(B-\mathcal{C}C)]$

3. Por 1 y 2 se cumple: $[(A\cap B)-(A\cap\mathcal{C}C)] \subset [A\cap(B-\mathcal{C}C)]$

4. (II) **FALTA PROBAR** ($\supset$) para que se cumpla la igualdad. (queda como ejercicio).

CONJUNTO POTENCIA

(19) Sean las proposiciones:

p : B es un conjunto unitario.
q : $C=\{B,\phi\}$ es el conjunto potencia de B.

Determinar el valor de verdad de:

i) p es condicional necesario y suficiente para q

ii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))=\{\phi,\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))\}$

***Solución*:**

i) 1. Supongamos que $B=\{a\}$ es el conjunto unitario.

2. Luego $\mathcal{P}(B)=\{B,\phi\}=C$

3. Decir que p es **CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE** para q implica dos cosas:

- 1°) Si la condicional $\boxed{p} \Rightarrow q$ es verdadero, siendo p fijo; indica que p es condición suficiente para q.

  2°) Si la condicional $q \Rightarrow \boxed{p}$ es verdadero, indica que p es condición necesaria para q.

Veamos:

4. Como $B=\{a\}$ es conjunto unitario, implica que $C=\{B,\phi\}$ es el conjunto potencia de B. Luego $p \longrightarrow q$ es verdadero. Es decir p es condición suficiente para q.

5. Como $\{B,\phi\}$ es el conjunto potencia de B, cuyos únicos elementos son el mismo B y el conjunto vacío, implica que B tiene un solo elemento; por tanto $q \longrightarrow p$ es V. Es decir, p es condición necesaria para q.

6. Por 4. y 5. concluimos que p es condición necesaria y suficiente para q.

   Luego *i*) es **VERDADERO**.

ii) Se tiene $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$. Es decir $\mathcal{P}(\phi)$ es unitario.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))=\{\mathcal{P}(\phi),\phi\}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))$ tiene dos elementos.

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))=\{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)),\phi,\{\mathcal{P}(\phi)\},\{\phi\}\}$

En consecuencia *ii*) es **FALSO**.

20 Sea $A=\{\mathcal{P}(\{a\}),\mathcal{P}(\phi)\}$. Hallar:

a) $\mathcal{P}(A)$

b) **ANALIZAR** la verdad o falsedad de:

b$_1$) $[\phi\in\mathcal{P}(A) \wedge \phi\subset\mathcal{P}(A)] \Rightarrow \{\{\phi\}\}\subset\mathcal{P}(A)$

b$_2$) $\{\phi,\{a\}\}\in\mathcal{P}(A) \Rightarrow \{\phi\}\in\mathcal{P}(A)$

***Solución*:**

a) $\mathcal{P}(A)=\{A,\phi,\{\mathcal{P}(\{a\})\},\{\mathcal{P}(\phi)\}\}=\{A,\phi,\{\{a\},\phi\},\{\{\phi\}\}\}$

b) b$_1$) $[\underbrace{\phi\in\mathcal{P}(A)}_{V} \wedge \underbrace{\phi\subset\mathcal{P}(A)}_{V}] \Rightarrow \underbrace{\{\{\phi\}\}\subset\mathcal{P}(A)}_{F}$

$$\underbrace{\underbrace{V \wedge V}_{V} \Rightarrow F}_{F}$$

b$_2$) $\underbrace{\{\phi,\{a\}\}\in\mathcal{P}(A)}_{V} \Rightarrow \underbrace{\{\phi\}\in\mathcal{P}(A)}_{F}$

$$\underbrace{V \Rightarrow F}_{F}$$

21 Demostrar usando propiedades sobre conjuntos que:

si $\mathcal{P}(A-B)\subset(B-C) \Rightarrow A\subset B$

***Prueba*:**

Si pruebo que: $A\cap B'=\phi$, entonces $A\subset B$

***Veamos*:**

1. Por propiedad P_5 de conjunto potencia, se cumple:

   si $\mathcal{P}(A-B)\subset\mathcal{P}(B-C)$ implica $\underbrace{(A-B)}\subset\underbrace{(B-C)}$

2. .... $\underbrace{A\cap B'}_{M}\subset\underbrace{B\cap C'}_{N}$

3. En 2 aplicar la propiedad: $M\subset N \iff M\cap N=M$

   así tendremos: $\underbrace{(A\cap B')\cap(B\cap C')}=A\cap B'$

4. Pero: $\underbrace{A\cap\underbrace{(B'\cap B)}_{\phi}\cap C'}=A\cap B'$

   $\phi \quad = A\cap B'$

5. Como $A\cap B'=\phi$, entonces $A\subset B$.

22 Probar que $\underbrace{\mathcal{P}[(A\cap B)\cup C]}_{M}=\underbrace{\mathcal{P}(A\cup C)\cap\mathcal{P}(B\cup C)}_{N}$

***Demostración*:**

Por definición de igualdad: $M=N \iff M\subset N \wedge N\subset M$

Probemos la 1° inclusión: $M\subset N$

***Veamos*:**

1. $\forall X\in\mathcal{P}[(A\cap B)\cup C] \Rightarrow X\subset[(A\cap B)\cup C]$

   $\Rightarrow X\subset[(A\cup C)\cap(B\cup C)]$

   $\Rightarrow X\subset(A\cup C) \wedge X\subset(B\cup C)$

   $\Rightarrow X\in\mathcal{P}(A\cup C) \wedge X\in\mathcal{P}(B\cup C)$

2. .... $\Rightarrow X\in[\mathcal{P}(A\cup C)\cap\mathcal{P}(B\cup C)]$

3. Por 1. y 2. afirmamos que $\mathcal{P}[A \cap B) \cup C] \subset \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$.

4. Probar la 2ª inclusión: $N \subset M$, queda como ejercicio.

5. En conclusión: por 3 y 4 queda probado que la igualdad:
$\mathcal{P}[(A \cap B) \cup C] = \mathcal{P}(A \cup C) \cap \mathcal{P}(B \cup C)$

NOTA:
La demostración puede ser directa, si aplicamos el **TEOREMA** DE 2.22.

(23) Dado los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{m, a, d, f, p, q, t\}$. Si h es el número de subconjuntos propios de A que son disjuntos con B y k es el número de subconjuntos no vacios de B que son disjuntos con A. Hallar $h + k$.

***Solución*:**

1. Se debe quitar a los conjuntos A y B la intersección $A \cap B$.

2. Como $A \cap B = \{a, d, f\}$, entonces:
$M = A - A \cap B = \{b, c, e\} \Rightarrow h = 2^3 - 1 = 7$
$N = B - A \cap B = \{m, p, q, t\} \Rightarrow k = 2^4 - 1 = 15$

3. Por tanto: $h + k = 7 + 15 = 22$

2.39 CONJUNTOS EQUIPOTENTES, CONJUNTOS FINITOS e INFINITOS

FUNCIONES:

Definición.- Dados dos conjuntos E y F, se llama función definido en E y con valores en F a toda correspondencia f que asocia a cada elementos $x \in E$ un único elemento $y \in F$.

Notación: $f : E \longrightarrow F$

$x \longmapsto y = f(x)$

Definición.- Se dice que f es inyectiva si y sólo si ,

$f(x) = f(x')$ implica $x = x'$ $\forall\, x, x' \in E$.

Definición.- Se dice que f es suryectiva, si y sólo si, para todo $y \in F$, existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$ o sea cuando $rang(f) = f(E)$.

└── rango de f.

Definición.- Se dice que $f : E \to F$ es biyectiva o una biyección, si y sólo si, es INYECTIVA y SURYECTIVA.

CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Definición.- Dados los conjuntos A y B, se dice que A es equipotente a B o que A, B tienen la misma potencia y se denota $A \approx B$, si y sólo si, existe una aplicación

$f : A \longrightarrow B$ biyectiva

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Definición.- Se dice que un conjunto A es finito, si y sólo si, para todo subconjunto propio B de A se tiene que A no es equipotente con B. En caso contrario, se dice que A es infinito.

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 01

Sean A, B, C y D subconjuntos de U. Demostrar que:

01. $A \subset B$ si y sólo si $A \cup B = B$
02. $A \subset B$ si y sólo si $A \cap B = A$
03. $A - B = (A \cup B) - B$
04. $A - B = A - (A \cap B)$
05. $A = (A - B) \cup B \Longleftrightarrow B \subset A$
06. $A = B \Longleftrightarrow \phi = (A - B) \cup (B - A)$
07. $A \cup (A \cap B) = A$
08. $A \cap (A \cup B) = A$
09. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
10. $A - (A \cap B) = A - B$
11. $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$
12. $A \cap B = (A \cup B) - (A \Delta B)$
13. $A - B = (A \Delta B) - B$
14. $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$
15. $A - (A \Delta B) = A \cap B$
16. $(A - B) \Delta (C - D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D)$
17. $A = B$ y $C = D \Rightarrow A \times C = B \times D$
18. $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$
19. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
20. $A \times C = B \times C$ y $C \neq \phi$ implican $A = B$
21. Si $A \subset C$ y $C \subset D$, expresar $\mathcal{C}_{B \times D}(A \times C)$ mediante uniones de productos.
22. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
23. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
24. $\mathcal{P}(A - B) \subset (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\phi\}$
25. $A \cap B = \phi$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$

GRUPO 02 DIFERENCIA SIMÉTRICA

01. Probar:
   a) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
   b) $A \Delta B = B \Delta A$
   c) $A \Delta \phi = A$
   d) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
   e) $A = B \Longleftrightarrow A \Delta B = \phi$
   f) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

02. ¿Bajo qué condiciones tiene solución la ecuación $B \Delta C = A$?

03. Sea A un conjunto. Supongamos $A \cup B = A$ para cada conjunto B. Mostrar que $B = \phi$.

04. Sean A y B dos conjuntos, tal que $A \cap B = \phi$. Demostrar que: $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ y $A \Delta B$ son subconjuntos de $A \cup B$.

05. Sean A y B dos conjuntos:

a) ¿Es $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? , ¿Es $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

b) Resolver la ecuación $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{A}$ para $\mathcal{A}$, obteniendo explícitamente $\mathcal{A}$ en términos de subconjuntos de A y B.

c) Usando (b) para computar: $\mathcal{P}(A \cup \{b\}) - \mathcal{P}(A)$
donde $\{b\}$ es un conjunto con $b \notin A$.

06. Sea $A \neq \phi$ y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de partes de A (conjunto potencia)

Definición.- A todo subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, lo llamaremos clase o familia de subconjuntos de A.

EJEMPLO.- Dado el conjunto $A = \{a , b , c\}$, el conjunto de partes de A es
$\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{a\}, \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\}\}$

Los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$:

$\mathfrak{F} = \{\phi , A\}$

$\mathcal{G} = \{\phi , A , \{a\} , \{b\} , \{a , b\}\}$

Se llaman **familias** de subconjuntos de A o **clases** de subconjuntos de A.

Halle Ud. cinco clases de subconjunto de A.

07. Sea $A \neq \phi$, $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de partes de A.

Definición.- Sea $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $\mathfrak{F}$ es una topología sobre A si, y solamente si satisface las proposiciones:

1) $A \in \mathfrak{F}$, $\phi \in \mathfrak{F}$

2) Si $M_1 , M_2 , \ldots , M_n \in \mathfrak{F}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} M_i \in \mathfrak{F}$.

Esto es "la intersección finita de los elementos de $\mathfrak{F}$, también es un elemento de $\mathfrak{F}$".

3) Si $M_\lambda \in \mathfrak{F}$, $\lambda \in I = \{1, 2, \dots n\}$, entonces $\bigcup_{\lambda \in I} M_i \in \mathfrak{F}$

Esto es, "la unión arbitraria de los elementos de $\mathfrak{F}$ es un elemento de $\mathfrak{F}$ ".

Observación: Los elementos de $\mathfrak{F}$ son subconjuntos de A.

EJEMPLO.- Dado $A = \{a, b, c\}$

La familia $\mathfrak{F} = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ es una topología sobre A, porque cumple:

1) $\phi \in$, A son elementos de $\mathfrak{F}$.

2) $\{a\} \cap \{b\} = \phi \in \mathfrak{F}$, $\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \mathfrak{F}$, $\{b\} \cap \{a,b\} = \{b\} \in \mathfrak{F}$

Cada elemento de $\mathfrak{F}$ intersectado con ϕ es $\phi \in \mathfrak{F}$.

Cada elemento de $\mathfrak{F}$ intersectado con A , es un elemento de $\mathfrak{F}$, la intersección finita de los elementos de $\mathfrak{F}$ es un elemento de $\mathfrak{F}$.

3) La unión $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\}$ es un elemento de $\mathfrak{F}$.

Cualquier unión de dos en dos o de tres en tres elementos de $\mathfrak{F}$, también es un elemento de $\mathfrak{F}$, la unión de cuatro en cuatro de los elementos de $\mathfrak{F}$, es un elemento de $\mathfrak{F}$; además $\phi \cup A \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{a,b\} = A \in \mathfrak{F}$. Todo lo dicho, se refiere a la unión arbitraria de elementos de $\mathfrak{F}$.

PROBLEMA: ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de A, constituyen una topología sobre A?

i) $\mathcal{J} = \{\phi , A , \{a\}\}$.

ii) $\mathcal{K} = \{\phi, A\}$.

iii) $\mathcal{G} = \{\phi , A , \{b\} , \{c\} , \{b , c\}\}$.

iv) $\mathcal{K} = \{\phi, A, \{a\}, \{b\}\}$.

88. Supongamos que a una de las dos caras de una moneda la llamamos "cara" (C) y a la otra "sello" (S). Al acto de lanzar, al aire, una, dos o tres monedas y esperar qué lado de la moneda aparece, en el suelo, mirando hacia arriba; se llama **EXPERIMENTO ALEATORIO**. Al conjunto de todos los resultados obtenidos de cada experimento aleatorio se llama **ESPACIO MUESTRAL.**

PROBLEMAS:

a) Hallar el espacio muestral, si lanzamos una moneda, una sola vez.

b) Hallar el espacio muestral, si lanzamos dos monedas, una sola vez.

c) Hallar el espacio muestral, si lanzamos tres monedas, una sola vez.

d) ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral, obtenido al lanzar "*n*" monedas?

e) Halle el conjunto {números posibles de "CARAS" que aparecen arriba cuando se lanzan 5 monedas}.

09. a) Hallar el conjunto potencia del conjunto obtenida de a) del problema 8.

b) Hallar el conjunto potencia del conjunto obtenido de b) del problema 8.

c) ¿Cuántos subconjuntos propios tendrá el espacio muestral obtenido en c)

10. Tirar un dado normal, sobre una superficie lisa se obtiene el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Hallar el subconjunto de Ω, cuyos elementos sean números pares.

b) Hallar el subconjunto de Ω, cuyos elementos sean números impares.

11. a) Hallar el espacio muestral (Ω), que se obtiene al lanzar un dado dos veces consecutivas.

b) De la parte a) obtener los siguientes subconjuntos de Ω:

i) El conjunto, que al sumar los puntos sea 7.

ii) El conjunto, que se obtiene 6 puntos sólo en la segunda tirada.

iii) $C = \{(x, y) \in \Omega / x = 5\}$

iv) El conjunto de obtener "suma" 6 puntos o 5 puntos.

v) $E = \{(x, y) \in \Omega / x + y > 8\}$

12. Con las cifras 1, 2 y 3 podemos formar números con estas tres cifras. Hallar el conjunto de números que se forman con estas tres cifras.

13. En el colegio "Mariscal Castilla", los padres de familia han formado un Comité Directivo conformada por tres personas: *A*, *B*, *C*. Los cargos a ocupar son : Presidente, Secretario y Tesorero. ¿De cuántas maneras se puede formar el Comité Directivo y cuál es el conjunto de ternas posibles?

14. Una caja contiene una moneda y un dado. Si Ud. extrae, una sola vez, primero la moneda y después el dado. Escriba el conjunto de todas las posibles parejas que se podrían obtener en este experimento aleatorio.

15. El espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y observar el resultado, es el conjunto $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dado los siguientes subconjuntos de Ω :

$A=\{x\in\Omega/x \text{ es par}\}$; $B=\{x\in\Omega/x \text{ es múltiplo de } 3\}$

Hallar: a) $A\cap B$, b) $A\cup B$, c) $A\,\Delta\, B$

16. Se tiene dos cajas, en la primera caja hay dos bolas numeradas con el 1 y con el 2, respectivamente, en la segunda caja hay tres bolas numeradas con el 1, 3 y 4, respectivamente. Un experimento aleatorio consiste en extraer una bola de la primera caja y luego extraer una bola de la segunda caja, en este orden.

a) Hallar el espacio muestral Ω que resulta de este experimento aleatorio.

b) Dado los conjuntos $A=\{(x,y)\in\Omega/x+y\geq 4\}$,

$B=\{(x,y)\in\Omega/x+y=5\}$. Hallar: $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $A\cup B$, $A\,\Delta\, B$

17. Llamemos a cada lado de una moneda : cara (C) y sello (S). Al tirar tres monedas una sola vez y observar el lado de la moneda que cae sobre una superficie lisa mirando hacia arriba, se obtiene el espacio muestral.

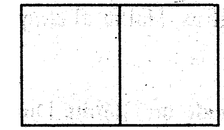
$$\Omega=\{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$$

Dados los conjuntos $A=\{w\in\Omega:\ w \text{ tiene una cara}\}$,

$B=\{w\in\Omega:\ w \text{ tiene al menos dos sellos}\}$.

Hallar: A , B , $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, $A\cup B$

18. Un niño dispone de tres lápices de colores: azul (A), blanco (B) y rojo (R). Desea pintar una bandera que tiene dos franjas, cada franja de diferente color. Halle el conjunto de todos los posibles colores diferentes que puede tener la bandera, teniendo en cuenta el orden de los colores diferentes de cada franja.



19. Se lanza un dado 2 veces consecutivas. Hallar:

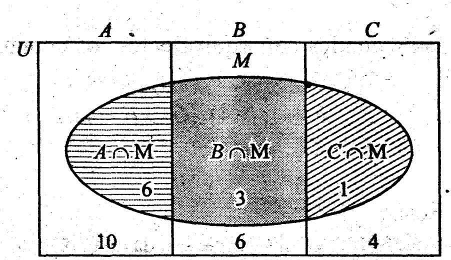
a) El conjunto, que al sumar los números de ambos dados den 7 puntos.
b) El conjunto, que sólo en la segunda tirada se obtiene 6 puntos.
c) El conjunto que se obtiene la suma 7 puntos o 6 puntos sólo en la segunda tirada.
d) El conjunto que se obtiene 7 puntos y 6 puntos sólo en la segunda tirada.

20. Se va a seleccionar un comité de tres miembros, a partir de un grupo de cinco personas A, B, C, D y E. Defina el espacio muestral.

GRUPO 03

21. En un aula de 24 alumnos, 5 de ellos estudian sólo inglés y 12 estudian sólo francés ¿cuántos estudian inglés y francés? si 4 de ellos no estudian ni inglés ni francés.

22. En el siguiente diagrama se tiene: el rectángulo U, que sea el conjunto que represente al territorio nacional. El rectángulo U se divide en tres rectángulos que son tres conjuntos A, B y C, que son disjuntos entre sí. Los conjuntos A, B y C representan a las regiones costa, sierra y selva, respectivamente.



El gobierno dispone de tres partidas presupuestales: M, N y R para financiar los proyectos de desarrollo.

En todo el país existen 20 proyectos diferentes, cada proyecto cuesta 1 millón de dólares.

En la costa existen 10 proyectos, en la sierra 6 proyectos y en la selva 4 proyectos. Según la partida M, se dispone para financiar 6 proyectos en la costa, 3 proyectos en la sierra y 1 proyecto en la selva.

a) Se elige un proyecto al azar, ¿Cuál será el porcentaje de que se financiará con la partida M?

b) Con la partida M, ¿con qué porcentaje se podrá hacer los proyectos en la sierra?

23. En el Club Deportivo Universitario hay dos socios S_1 y S_2 que son candidatos a la presidencia del Club. Del total de 120 socios, luego de una encuesta, han declarado que 48 personas apoyarán al candidato S_1 y 72 socios han declarado que apoyarán al candidato S_2. Todos los socios pagan una cuota mensual. Pero en los socios hay el temor que suban las cuotas mensuales, luego de la elección. Las posibilidades de que aumenten las cuotas mensuales de los socios son de 0.9 si sale elegido S_1 y de 0.2 si sale elegido S_2.

a) ¿Cuál es el porcentaje de que haya un aumento en las cuotas mensuales de los socios?

b) Si se aumenta la cuota mensual, ¿con qué porcentaje saldría elegido el socio S_1?¿el socio S_2?.

24. El experimento consiste en echar dos monedas sobre una mesa.

a) Hallar el espacio muestral.

Hallar los siguientes subconjuntos del espacio muestral:

b) A : en la primera moneda aparece sello;
B : en la primera moneda aparece cara;
C : en la segunda moneda aparece sello;
D : en la segunda moneda aparece cara;
E : el sello aparece por lo menos una vez;
F : la cara aparece por lo menos una vez;
G : aparecen una vez cara y la otra sello;
H : no aparece ninguna vez sello;
K : aparece dos veces sello.

c) Determinar a cuáles de los acontecimientos citados son equivalentes los acontecimientos siguientes:

1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $E \cap F$; 4) $G \cup E$
5) $G \cap E$; 6) $B \cap D$; 7) $E \cup K$

25. Se efectúan tres disparos sobre un objetivo. Sean:

A_1 : en el primer tiro da en el blanco.
A_2 : en el segundo tiro da en el blanco.
A_3 : en el tercer tiro da en el blanco.
A_1^C : en el primer tiro no se da en el blanco.
A_2^C : en el segundo tiro no se da en el blanco.
A_3^C : en el tercer tiro no se da en el blanco.

Represéntese, como suma de conjuntos (unión disjunta de conjuntos) y producto de conjuntos (intersección de conjuntos), los siguientes acontecimientos:

A : los tres disparos dan en el blanco;
B : los tres tiros fallan en el blanco;
C : por lo menos un tiro da en el blanco;
D : por lo menos un tiro falla su blanco;
E : por lo menos dos tiros dan en el blanco;
F : no más de un tiro da en el blanco;
G : el primer blanco se consigue en el tercer tiro.

26. Si se tiene tres cajas, la posibilidad de elegir una caja de las tres existentes es $\frac{1}{3}$.

En la primera caja existen "a" bolas blancas y "b" bolas negras; en la segunda caja existen "c" bolas blancas y "d" bolas negras; en la tercera caja solo hay bolas blancas. Alguien saca de una caja, elegido arbitrariamente, una bola. Determinar la posibilidad (expresado como fracción propia) de que esta bola sea blanca.

27. Una clase de Matemática avanzada está formada por 10 estudiantes de segundo año, 30 de cuarto año y 10 graduados. Tres estudiantes de segundo año, 10 del cuarto año y 5 graduados obtuvieron la calificación A. Si se selecciona al azar un estudiante de esta clase y se encuentra que su calificación es A, ¿Cuál es la posibilidad de que sea un graduado?

28. Suponga que de una investigación independiente, encontramos que el 2% (0.02) de todos los clientes que tienen crédito finalmente no pagan sus cuentas y de aquellas que finalmente sí la pagan, el 45% (0.45) se han demorado en por lo menos dos ocasiones. Encuentre la posibilidad (expresado en fracciones) de que un cliente que ya se demoró por lo menos en 2 ocasiones finalmente no pague su cuenta.

29. Supongamos que en la Universidad San Marcos el 60% de estudiantes son hombres y el resto son mujeres. El 40% de los hombres y el 20% de las mujeres fuman.

a) Determine el porcentaje de fumadores.

b) Determine el porcentaje que los estudiantes que fuman sean mujeres.

30. De 200 estudiantes de último año en el Colegio Simón Bolívar, 98 son mujeres, 54 están estudiando inglés avanzado y 20 de estas personas son mujeres. Si un estudiante se toma aleatoriamente del grupo ¿Cuál es el porcentaje de que sea estudiante de inglés avanzado?

GRUPO 04 (Cardinalidad de un conjunto)

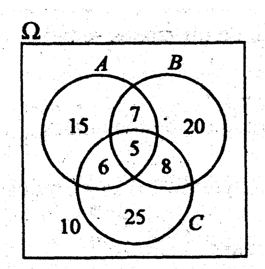
01. Probar que Card $(A \Delta B)$ = Card $(A - B)$ + Card $(B - A)$

02. Probar que Card $(A - B)$ = Card $(B \cup A)$ – Card (B)

03. Si $A \subset B$, probar que Card $(B \cup A)$ = Card (B)

04. Si $A \cap B \cap C \neq \phi$, probar que Card $(A \cup B \cup C)$ = Card (A) + Card (B) + Card (C) – Card $(A \cap B)$ – Card $(A \cap C)$ – Card $(B \cap C)$ + Card $(A \cap B \cap C)$.

05. El siguiente diagrama expresá la distribución del número de estudiantes de un colegio que cursan el quinto año de secundaria que estudian inglés (A), francés (B), alemán (C) y los que no estudian ninguno de estos tres idiomas.



Se pregunta:

a) ¿Cuántos estudiantes cursan el quinto año de secundaria?

b) ¿Cuántos estudian inglés?

c) ¿Cuántos estudian sólo inglés?

d) ¿Cuántos estudian francés?

e) ¿Cuántos estudian sólo francés?

f) ¿Cuántos estudian alemán?

g) ¿Cuántos estudian sólo alemán?

h) ¿Cuántos estudian inglés y francés?

i) ¿Cuántos estudian sólo inglés y francés?
j) ¿Cuántos estudian inglés y alemán?
k) ¿Cuántos estudian sólo inglés y alemán?
l) ¿Cuántos estudian alemán y francés?
ll) ¿Cuántos estudian sólo alemán y francés?
m) ¿Cuántos estudian solo un idioma
n) ¿Cuántos estudian sólo dos idiomas?
r) ¿Cuántos estudian al menos un idioma?
s) ¿Cuántos estudian a lo más dos idiomas?
t) ¿Cuántos estudian los tres idiomas?
u) ¿Cuántos estudian por lo menos dos idiomas?
w) ¿Cuántos no estudian idiomas, de los tres mencionados?

06. En una sección de 30 alumnos del Colegio San Agustín se practican dos deportes: básquetbol y fútbol.
10 alumnos no practican ninguno de los dos deportes;
15 alumnos practican sólo un deporte
¿Cuántos alumnos practican los dos deportes?

07. En una sección de 90 estudiantes de la Universidad San Agustín se encuestan a todos acerca de la práctica de tres deportes: fútbol, básquetbol y atletismo. El resultado de la encuesta es: 60 estudiantes practican sólo un deporte;
5 estudiantes practican los tres deportes;
10 no practican ningún deporte.

a) ¿Cuántos estudiantes practican sólo dos deportes?
b) ¿Cuántos estudiantes practican al menos un deporte?

08. De un total de 50 personas, 30 son hombres y 25 personas son casadas. Sabiendo que 15 mujeres son casadas.

a) ¿Cuántos hombres son casados?
b) ¿Qué porcentaje de mujeres son casadas?

09. En la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo hay 200 empleados que laboran en calidad de nombrados, contratados y de servicio no personal; de los cuales se tiene:
70 empleados son contratados;
30 empleados son de servicio no personal.
Por el día de la AMISTAD, el rector ha dispuesto sortear 50 regalos, de los cuales :
20 empleados nombrados obtuvieron regalo;
15 empleados contratados obtuvieron regalo; y el resto lo obtuvieron los empleados de servicio no personal.
a) ¿Qué porcentaje de empleados nombrados, obtuvieron regalo?
b) ¿Qué porcentaje de empleados de servicio no personal, obtuvieron regalo?

10. Se encuestan a 60 lectores sobre sus preferencias de leer las revistas: *A*, *B* y *C*.
Se obtuvieron los siguientes resultados:

No hay lectores que lean las revistas *A* y *C*, pero si hay lectores que leen *A* y *B* o *B* y *C*. 15 leen sólo *A*, 10 leen sólo *B* y 20 leen sólo *C*, 25 leen *B* y 30 leen *C*.

a) ¿Cuántos leen *B* y *C*?
b) ¿Cuántos leen *A* y *B*?
c) Cuántos leen dos revistas?
d) Cuántos leen sólo una revista?

11. 41 turistas se alojan en el hotel Bolívar y admiten que:
hablan inglés 20 turistas; hablan francés 10 turistas y 22 turistas hablan sólo un idioma.

a) ¿Cuántos turistas hablan los dos idiomas?
b) ¿Cuántos turistas no hablan ninguno de los dos idiomas?

12. En la Universidad Católica se dan clases de: inglés, francés y alemán. Se ha elegido un aula, al azar, que tiene 50 alumnos, de los cuales:

30 estudian inglés, 20 estudian francés. Todos los que estudian francés también estudian inglés, 5 no estudian ninguno de los tres idiomas. Un grupo sólo estudian alemán.

a) ¿Cuántos alumnos estudian sólo alemán?
b) ¿Cuántos alumnos sólo inglés?

13. El municipio ha creado 3 impuestos: *A*, *B* y *C*.
En una vecindad de 100 personas se tiene: 30 personas pagan el impuesto *B* ; todos los que pagan el impuesto *B* también pagan el impuesto *A*. Los que pagan sólo el impuesto *A* son 40; no hay personas que pagan los impuestos *B* y *C*; hay 90 personas que pagan *A* o *C*.

a) ¿Cuántas personas pagan el impuesto *C*?
b) ¿Cuántas personas no pagan estos impuestos?
c) Si la diferencia entre los que pagan sólo el impuesto *C* y los que pagan *A* y *C*, es 10, ¿Cuántos pagan sólo *C*?, ¿Cuántos pagan *A* y *C*?

14. En la Universidad Nacional San Marcos se van a dar tres premios : *A* , *B* y *C* a distinguidos profesores. Hay 60 candidatos y luego de una previa calificación se obtuvieron los siguientes resultados :

Todos los que reciben el premio *B*, también recibirán el premio *A*. Hay 3 profesores que recibirán los tres premios; 5 profesores recibirán los premios *A* y *C*; 18 profesores recibirán el premio *C*; 35 profesores recibirán por lo menos los premios *A* y *C*.

a) ¿Cuántos profesores recibirán el premio *A*?
b) ¿Cuántos profesores recibirán sólo el premio *C*?
c) ¿Cuántos profesores no recibirán premios?
d) ¿Cuántos profesores recibirán solo el premio *A*?

15. De 150 pacientes examinadas en una clínica, se encontró que 60 tenían sólo enfermedades cardiacas; 20 tenían solo diabetes y 40 ninguno de estos males.

a) ¿Cuántos pacientes tenían ambas enfermedades?
b) ¿Cuántos pacientes tenían por lo menos uno de las enfermedades?
c) ¿Cuántos pacientes tenían una sola enfermedad?

GRUPO 05 (Partición de un conjunto)

Definición.- Sea $E_1, E_2, \dots, E_n$ subconjuntos de un conjunto S. Se dice que estos subconjuntos forman una partición de S si se satisfacen las siguientes propiedades:

i) Cada E_i es un subconjunto propio de S, esto es,
$E_i \subset S$, $i = 1, 2, \dots, n$ pero $E_i \neq S$

ii) Los subconjuntos E_i son disjuntos en parejas, esto es:
$E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$

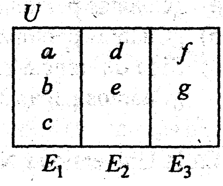
iii) La unión de todos los subconjuntos E_i es S, esto es,
$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$.

Ejemplo.- Sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Entonces $E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{d, e\}$, $E_3 = \{f, g\}$, forman una partición de U, porque:

i) $E_1 \subset U$, $E_2 \subset U$ y $E_3 \subset U$

ii) $E_1 \cap E_2 = \phi$, $E_1 \cap E_3 = \phi$, $E_2 \cap E_3 = \phi$

iii) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = U$



NOTA: La idea de "partición de un conjunto" es, en este caso, como partir una torta en 3 partes.

PROBLEMAS

01. Supongamos que se tiene un club formado por 20 personas adultas.

a) Según el estado civil de los miembros del club, se tiene:

E_1 : 10 personas casadas ; E_2 : 6 mujeres solteras ; E_1 : 4 hombres solteros;

- ¿Los subconjuntos E_1 , E_2 , E_3 forman una partición de S ?
Justifique.

b) Según el sexo, los miembros del club se clasifican en:

E_1 : 12 hombres ; E_2 : 8 mujeres;

¿ E_1 y E_2 constituyen una partición del conjunto formado por los 20 miembros del club?

c) Según la preferencia política: 10 demócratas, 8 republicanos, 2 independientes ¿existe una partición del club?

02. El resultado de lanzar un dado normal sobre una mesa y observar la cara que mira hacia arriba es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Sean los subconjuntos: $A = \{ x \in \Omega : x \text{ es número par } \}$,

$B = \{ x \in \Omega : x \text{ es un número impar } \}$

¿Los subconjuntos A, B forman una partición de Ω?
Justifique.

03. El intervalo cerrado $S = [1,5]$, dividimos en los subintervalos

$E_1 = [1,2\rangle$, $E_2 = [2,3\rangle$, $E_3 = [3,4\rangle$, $E_4 = [4,5\rangle$

¿Los subconjuntos E_1 , E_2 , E_3 y E_4 forman una partición de S ? Justifique.

04. De 20 miembros que tiene el club (problema 1*a*) se tiene que:
6 de las personas casadas; 3 de las mujeres solteras y 1 de los solteros, son demócratas.

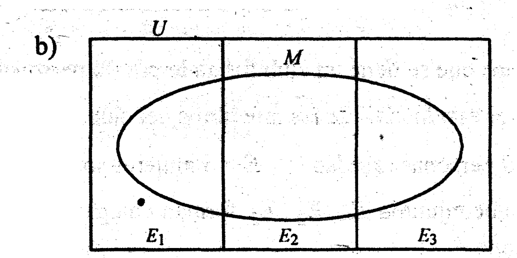
Sean D : el conjunto de los demócratas;
E_1 : personas casadas;
E_2 : mujeres solteras;
E_3 : hombres solteros.

¿Cuáles son los subconjuntos propios del conjunto D, que forman una partición del conjunto D?

05. En los siguientes diagramas:

a) U, E_1, E_2, E_3, S

b)



i) En a) ¿Cuáles son los subconjuntos propios de U que son partición de U.

ii) ¿Cuáles son los subconjuntos propios de S que son partición de S?

iii) En b) ¿cuáles son los subconjuntos propios de M que son partición de M?

06. En un aula que tiene 30 niños y 20 niñas dieron examen de la asignatura de Matemáticas. El resultado fue: 10 niños aprobaron y 15 niñas desaprobaron.

a) ¿Qué porcentaje del total de alumnos aprobaron el examen de Matemáticas?

b) ¿Qué porcentaje de niñas aprobaron?

07. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$.

a) Hallar el conjunto potencia de A

b) Halle algunas particiones de A

08. Sean los conjuntos:

M : conjunto de personas que viven en Lima.
A : conjunto de personas que viven en Lima y fuman.
B : conjunto de personas que viven en Lima que tienen vivienda propia.
C : personas que viven en Lima y no tienen vivienda.
D : personas que viven en Lima y pagan 100 dólares por alquiler de vivienda mensual.
E : personas que viven en Lima y pagan más de 100 dólares y menos de 200 dólares por alquiler de vivienda mensual.
F : Personas que viven en Lima y pagan más de 200 dólares por alquiler de vivienda mensual. ¿Diga qué conjuntos son partición de otros?

09. Sean $\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros

Dado los subconjuntos: $A = \{ x \in \mathbb{Z} : x \text{ es número par} \}$

$B = \{ x \in \mathbb{Z} : -3 < x \leq 4 \}$

¿Qué conjuntos forman una partición de $\mathbb{Z}$?

10. Dados dos conjuntos A y B tal que $A \cap B \neq \phi$

Dibuje un diagrama de Venn y señale las partición de los conjuntos A, B y $A \cup B$

GRUPO 06 (Operaciones con conjuntos)

01. Si el universo U es el conjunto de enteros positivos menores que 20, tabule cada una de los siguientes conjuntos:

$$A=\{x/x^2\in U\} \quad , \quad B=\{x\in U : x^2-11x+28=0\} \quad , \quad C=\{x\in \Omega/x \text{ es primo}\}$$

Hallar: a) $B-A$, $A-B$, $A\Delta B$

b) $\mathcal{C}(\mathcal{C}C-A)$

02. Dado los conjuntos:

A : el conjunto de todos los enteros positivos pares que constan de un dígito

B : el conjunto de todos los enteros negativos cuyos cuadrados son menores que 50.

C : el conjunto de los divisores de 6.

Hallar: $A\cap B$, $B\cap C$, $B-A$

03. Si $A=\{1,2,3,4\}$, ¿Cuáles son los conjuntos propios de B, tales que $\{1,2\}\subset B$ y $B\subset A$.

04. Sea $U=\{-2,0,1,2,3,4\}$ el conjunto universo

Sean $A=\{x\in U: x-x^2=0\}$

$B=\{x\in U: (x-1)(x^2-4)=0\}$

$C=\{x\in U: (x^3-1)(x^2-3x+2)=0\}$

Hallar: $A\cap B\cap C$, $C-B$, $(A-C)\cup(B-A)$, $\mathcal{C}B\cap\mathcal{C}A$

05. Sean A : conjunto de divisores de 4

B : conjunto de divisores de 6.

Hallar: $A\cap B$, $B-A$

06. Responda con un si o con un no. Justifique su respuesta:

a) ¿Es verdad que $x^2=4 \Rightarrow x=2$?

b) ¿Es verdad que $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$?

c) ¿Es verdad que $a=b \Rightarrow a^2=b^2$?

07. Dado los siguientes conjuntos:

$A=\{x\in \mathbb{R}:\ x^2=4\}$; $B=\{x\in \mathbb{R}:\ x^2+4=0\}$; $C=\{x\in \mathbb{R}:\ x^4-16=0\}$

Se pide hallar: a) $\mathcal{P}(A)$, b) $\mathcal{P}(B)$, c) $\mathcal{P}(C)$
d) $\mathcal{P}(C)-\mathcal{P}(A)$, e) $\mathcal{P}(C)-\mathcal{P}(B)$

08. Sea $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n\}$ el conjunto universal.
Se dan tres subconjuntos de U: A , B y C , tal que:

$A\cap B=\{a,b,c\}$, $A\cap C=\{d,c\}$,

$B\cap C\cap A^c=\{e\}$; $A\cap B^c\cap C^c=\{f,g\}$

$B\cap A^c\cap C^c=\{h,i\}$; $C\cap A^c\cap B^c=\{j,k,l\}$

Hallar: $A\cap B\cap C$, A,B,C , $A\cup B$, $A^c\cap B^c\cap C^c$.

09. Represente en un diagrama de Venn las siguientes relaciones conjuntistas:

E_1 , E_2 , E_3 son subconjuntos propios no vacíos de U, disjuntos dos a dos.

M es un subconjunto propio de U , tal que $M\cap E_i\neq\phi$, $\forall i=1,2,3$;

Además: $\bigcup_{i=1}^{3}(M\cap E_i)=M$

10. Sea $U=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$

Dado los conjuntos $A=\{x\in U:\ (x^2-3x+2)(x^2-7x+12)=0\}$,
$B=\{x\in U:\ (x^2-6x+5)(x-2)=0\}$

Hallar: $A\,\Delta\,B$, $\mathcal{C}(A\cup B)$.

SOLUCIONES

02. $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cap C = \phi$, $B \cup C = A$

07. (i) , (ii) , (iii) son topologías sobre A.
(iv) no es una topología sobre A.

08. a) $\Omega = \{C,S\}$, b) $\Omega = \{ (C,C) , (C,S) , (S,S) , (S,C) \}$,

c) $\Omega = \{ (C,C,C) , (C,C,S) , (C,S,C) , (S,C,C), (C,S,S), (S,C,S) (C,S,S), (S,S,S) \}$

Nota: Ω es la letra griega omega.

d) 2^n e) si x es el número de caras, entonces $x : 0,1,2,3,4,5$

09. a) $\mathcal{P}(\Omega) = \{ \phi, \Omega , \{C\} , \{S\} \}$

b) $\mathcal{P}(\Omega) = \{\phi , A, \{(C,C)\},\{(C,S)\},\{(S,S)\},\{(S,C)\},\{(C,C),(C,S)\},\{(C,C),(S,S)\},$
$\{(C,C),(S,C)\},\{(C,S),(S,S)\},\{(C,S),(S,C)\},\{(S,S),(S,C)\},\{(C,C),(C,S),(S,S)\},$
$\{(C,C), (C,S), (S,C)\}, \{(C,C),(S,S),(S,C)\},\{(C,S),(S,S),(S,C)\}$

c) $2^3 - 1 = 7$

10. a) $A = \{ 2 , 4 , 6 \}$, b) $B = \{ 1 , 3 , 5 \}$

11. a) $\Omega = \{ (1,1) (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,$
$(3,1) (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) ,$
$(5,1) (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) \}.$

b) i) $A = \{ (1,6) , (2,5) , (3,4) , (4,3) , (5,2) , (6,1) \}$
ii) $B = \{ (1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) , (5,6) \}$
iii) $C = \{ (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) \}$
iv) $D = \{ (1,5) , (2,4) , (3,3) , (4,2) , (5,1) , (1,6) , (2,5) , (3,4), (4,3) , (5,2), (6,1)\}$
v) $E = \{ (3,6) , (4,6) , (5,6) , (6,3) , (6,4) , (6,5) \}$

12. $A = \{ 123, 132 , 231 , 213 , 312 , 321 \}$

13. $A = \{ ABC , ACB , BCA , BAC , CAB , CBA \}$
Hay 6 maneras de formar el Comité Directivo.

14. $\Omega = \{ (c,1) , (c,2) , (c,3) , (c,4) , (c,5) , (c,6) , (s,1) , (s,2) , (s,3) (s,4) , (s,5), (s,6) \}$
c: cara , s: sello

15. $A = \{2,4,6\}$, $B = \{3,6\}$
a) $A \cap B = \{6\}$, b) $A \cup B = \{2,3,4,6\}$, c) $A \Delta B = \{2,3,4\}$

16. $\Omega = \{ (1,1) , (1,3) , (1,4) , (2,1) , (2,3) , (2,4) \}$
$A = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
$B = \{ (1,4) , (2,3)\}$, $A \cap B = B$, $A - B = \{(1,3),(2,4)\}$, $B - A = \phi$,
$A \cup B = A$, $A \Delta B = A - B$.

17. $A = \{ css , scs , ssc \}$, $B = \{ ssc , scs , ssc , sss \}$,
$A \cap B = A$, $A - B = \phi$, $B - A = \{sss\}$, $A \cup B = B$

18. $\Omega = \{ AB , BA , AR , RA , BR , RB \}$

19. a) $A = \{ (1,6) , (6,1) , (2,5) , (5,2) , (3,4) , (4,3)\}$
b) $B = \{ (1,6) , (2,6) , (3,6) , (4,6) , (5,6)\}$
c) $A \cup B = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$
d) $A \cap B = \{ (1,6) \}$.

20. $\Omega = \{ ABC , ABD , ABE , ACD , ACE , ADE , BCD , BCE , BDE , CDE \}$.

21. 3

22. a)

$\frac{10}{20}$: $A \xrightarrow{\frac{6}{10}} M$

$\frac{6}{20}$: $B \xrightarrow{\frac{3}{6}} M$

$\frac{4}{20}$: $C \xrightarrow{\frac{1}{4}} M$

$$P(M) = \frac{10}{20} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{20} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{20} \cdot \frac{1}{4} = 0.50 \approx 50\%$$

b) $P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{6}{20} \cdot \frac{3}{6}}{0.50} = \frac{0.15}{0.50} = 0.30 \approx 30\%$

23. a)

$\frac{48}{120} = 0.4$: $E_1 \xrightarrow{0.9} M$

$\frac{72}{120} = 0.6$: $E_2 \xrightarrow{0.2} M$

E_1 : que salga elegido el socio S_1
E_2 : que salga elegido el socio S_2
M : aumento en las cuotas.

$$P(M) = \frac{48}{120}(0.9) + \frac{72}{120}(0,2) = 0.48 \text{ o } 48\%$$

b) $P(E_1/M) = \frac{P(E_1 \cap M)}{P(M)} = \frac{(0.4)(0.9)}{0.48} = 0.75$ o 75%

24. a) $\Omega = \{ CC , CS , SC , SS \}$

b) $A = \{SC , SS\}$; $B = \{CC,CS\}$; $C = \{CS,SS\}$; $D = \{CC,SC\}$;
$E = \{CS,SC,SS\}$; $F = \{CS,SC,CC\}$; $G = \{CS,SC\}$
$H = \{CC\}$; $K = \{(SS)\}$

c) 1) $A \cup C = E$; 2) $A \cap C = K$; 3) $E \cap F = G$
4) $G \cup E = E$; 5) $G \cap E = G$; 6) $B \cap D = H$; 7) $E \cup K = E$

25. $A = A_1 A_2 A_3$, $B = A_1^C A_2^C A_3^C$

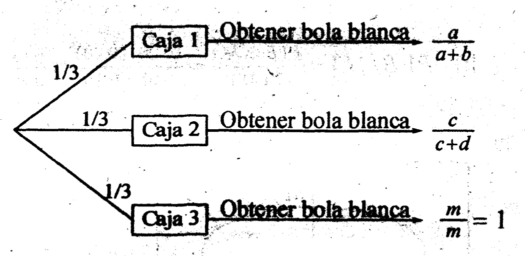
$$C = A_1 A_2^C A_3^C + A_1^C A_2 A_3^C + A_1^C A_2^C A_3 + A_1 A_2 A_3^C + A_1 A_2^C A_3 + A_1^C A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

$$D = A_1^C A_2 A_3 + A_1 A_2^C A_3 + A_1 A_2 A_3^C + A_1^C A_2^C A_3 + A_1^C A_2 A_3^C + A_1^C A_2^C A_3^C$$

$$E = A_1 A_2 A_3^C + A_1 A_2^C A_3 + A_1^C A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

$$F = A_1 A_2 A_3 \quad , \quad G = A_1^C A_2^C A_3 .$$

26. Sea
M: evento de obtener bola blanca.

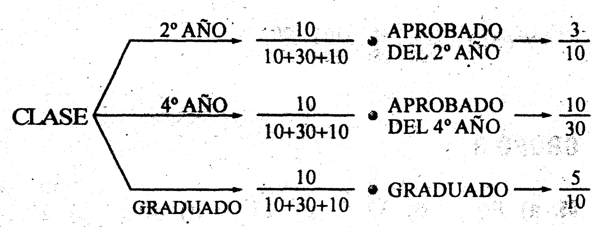


Luego:

$$P(M) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{1}{3} \frac{c}{c+d} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1 \right).$$

27.

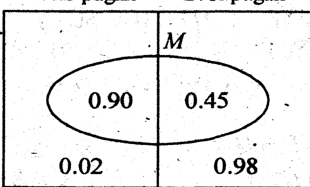
2° año	4° año	Graduado
	A	
3	10	5
10	30	10



a) P [un estudiante elige sea aprobado] $= \frac{10}{50} \cdot \frac{3}{10} + \frac{30}{50} \cdot \frac{10}{30} + \frac{10}{50} \cdot \frac{5}{10} = \frac{18}{50}$

b) P [el aprobado sea un graduado] $= \frac{P(\text{Graduado y aprobado})}{P(\text{un estudiante aprobado})} = \frac{\frac{10}{50} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{10}{50}} = \frac{3}{10}$

28. Ver en el siguiente diagrama:



A : los que no pagan

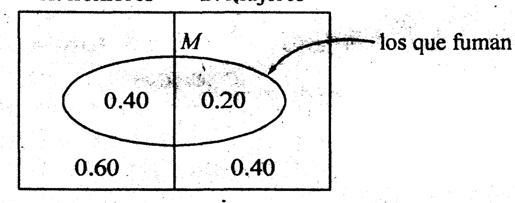
B : los que sí pagan

$A \cap M$: los que en dos ocasiones no pagan

$B \cap M$: los que en una ocasión no pagan

Se pide $P[A/M] = \frac{(0.90)(0.2)}{(0.90)(0.02)+(0.45)(0.98)} = 0.0392$

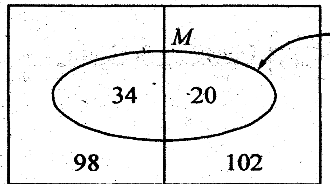
29.



a) $P[M] = (0.40)(0.60) + (0.20)(0.40)$

b) $P[B/M] = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{(0.20)(0.40)}{0.08+0.16} = \frac{0.08}{0.24} = 0.33$

30.



$P(M) = \frac{98}{200} \cdot \frac{34}{98} + \frac{102}{200} \cdot \frac{20}{102}$

GRUPO 3

05. a) 96 ; b) 33 ; c) 15 ; d) 40 ; e) 20 ; f) 44 ; g) 25 ;
h) 12 ; i) 7 ; j) 11 ; k) 5 ; l) 13 ; ll) 8 ; m) 60 ;
n) 21 ; r) 86 ; s) 81 ; t) 5 ; u) 26 ; w) 10

06. 5 alumnos.

07. a) 15 ; b) 80

08. a) 10 ; b) 60%

09. a) 40% ; b) 30%

10. a) 10 ; b) 5 ; c) 15 ; d) 45

11. a) 4 ; b) 15

12. a) 15 ; b) 10

13. a) 20 ; b) 10 ; c) 15 , 5

14. a) 22 ; b) 13 ; c) 25 ; d) 7

15. a) 30 ; b) 120 ; c) 80

GRUPO 4

01. a) Si ; b) Sí ; c) Sí

02. Si ; **03.** Sí

04. $E_1 \cap D$, $E_2 \cap D$, $E_3 \cap D$.

05. *i)* E_1 , E_2 , E_3 ; *ii)* $E_1 \cap S$, $E_2 \cap S$, $E_3 \cap S$;

iii) $E_1 \cap M$, $E_2 \cap M$, $E_3 \cap M$

06. a) $\frac{3}{10} \times 100$ b) $\frac{1}{3} \times 100$

07. Algunas particiones de A, son: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$
otra: $\{b\}$, $\{a,c\}$, otra : $\{a\}$, $\{a,b\}$

08.

M	
A	A^C

M	
B	B^C

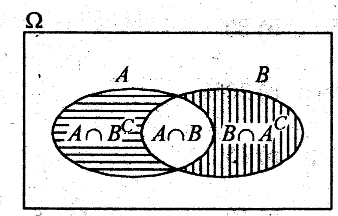
C		
D	E	F

09. a) A y A^C forman una partición de $\mathbb{Z}$, siendo
$A^C = \{x \in \mathbb{Z} : x$ es número impar $\}$.

b) Si definimos: $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -3\}$, $D = \{x \in \mathbb{Z} : x > 4\}$
entonces B , C , D forman una partición de $\mathbb{Z}$.

NOTA: Se pueden formar más conjuntos que constituyan una partición de $\mathbb{Z}$.

10.



a) $A\cap B^C$ y $A\cap B$ es una partición de A.

b) $A\cap B$ y $B\cap A^C$ es una partición de B.

c) $A\cap B^C$, $A\cap B$, $B\cap A^C$ es una partición de $A\cup B$.

d) $A\cap B^C$, B es una partición de $A\cup B$.

e) A , $B\cap A^C$ es una partición de $A\cup B$.

f) A y A^C es una partición de Ω.

g) B y B^C es una partición de Ω.

GRUPO 5

01. $U=\{1,2,3,\ldots,19\}$

$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{4,7\}$, $C=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

a) $B-A=\{7\}$, $A-B=\{1,2,3\}$

b) $\mathcal{C}(\mathcal{C}C-A)=\{1,2,3,4,5,7,11,13,17,19\}$

02. $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7\}$

$C=\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$, $A\cap B=\phi$

$B\cap C=\{-1,-2,-3\}$, $B-C=\{-4,-5,-6,-7\}$

03. $\{1,2,3\}$; $\{1,2,4\}$.

04. $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,-2\}$, $C=\{1,2\}$

$A\cap B\cap C=\{1\}$, $C-B=\phi$, $A-C=\{0\}$

$B-A=\{2,-2\}$, $\mathcal{C}B\cap\mathcal{C}A=\{3,4\}$

05. $A=\{-4,-2,-1,1,2,4\}$, $B=\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$

$A\cap B=\{-2,-1,1,2\}$, $B-A=\{-6,-3,2,6\}$

06. a) No, porque el conjunto solución para x de la ecuación $x^2=4$ es $A=\{-2,2\}$, y A no está contenido en $B=\{2\}$, que es el conjunto solución de la ecuación $x=2$.

b) No, por la misma razón que está explicada en a) otra manera de justificar es:

la igualdad $a^2 = b^2$ implica $a^2 - b^2 = 0$, esto implica $(a-b)(a+b)=0$ y esto, a su vez, implica $a = b \vee a = -b$.

c) Si, porque el conjunto $B = \{b\}$ está incluido en el conjunto $A = \{-b, b\}$, si consideramos que son soluciones de las ecuaciones $a = b$ y $a^2 = b^2$, respectivamente.

07. $A = \{-2, 2\}$, $B = \phi$, $C = \{-2, 2\}$,

a) $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{-2\}, \{2\}\}$

b) $\mathcal{P}(B) = \{\phi\}$

c) $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(A)$

d) $\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A) = \phi$

e) $\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(B) = \{A, \{-2\}, \{2\}\}$.

08. $A \cap B \cap C = \{c\}$, $A = \{a, b, c, d, f, g\}$,

$B = \{a, b, c, e, h, i\}$, $C = \{c, d, e, j, k, l\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A^C \cap B^C \cap C^C = \{m, n\}$

09. U

M

E_1 E_2 E_3

10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$

$A \Delta B = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{A \cup B\} = \{6, 7, 8, 9\}$

GRUPO 07

01. Si el porcentaje de comprar el periódico D es $P(D)=30\%$, la de una revista R es $P(R)=20\%$ y la de comprar ambos $P(D \cap R)=8\%$, calcular los porcentajes de los sucesos siguientes:

a) Comprar un periódico o una revista.
b) Comprar un periódico y no una revista.
c) Una revista y no un periódico.
d) No comprar un periódico y comprar una revista.
e) No comprar un periódico o no comprar una revista.
f) No comprar un periódico y no comprar una revista.

Respuestas: a) 42% b) 22% c) 12%
d) 12% e) 92% f) 58%

02. Determínese el porcentaje de que al lanzar n veces dos dados se obtenga al menos un seis doble.
¿Cuántos lanzamientos habría que realizar para tener un porcentaje de 50% de obtener al menos un seis doble?

Respuesta: $\left[1-\left(\frac{35}{36}\right)^n\right] \times 100\%$; $n \approx 24.6 \approx 25$

03. Tenemos dos bolsas, la primera con 10 bolas, 7 blancas y 3 negras; la segunda con 9 bolas, 3 blancas y 6 negras.
Se extrae al azar una bola de la primera bolsa y se pasa a la segunda. De esta bolsa, también al azar, se saca una bola, calcúlese el porcentaje que esta sea blanca.

Respuesta: $\frac{37}{100}$ Nota: $0.37 \approx \frac{37}{100}$.

04. Sean tres urnas con las siguientes composiciones de bolas blancas y negras:

$U_1 =$ {3 blancas y 2 negras}
$U_2 =$ {4 blancas y 2 negras}
$U_3 =$ {1 blanca y 4 negras}

Calcúlense:
a) Porcentaje de extraer bola blanca.
b) Porcentaje de que una bola negra que se ha extraído proceda de la segunda urna.

Respuesta: a) $\frac{22}{45} \times 100$ b) $\frac{5}{23} \times 100$